



Уральский  
федеральный  
университет

имени первого Президента  
России Б. Н. Ельцина

Уральский  
энергетический  
институт

**В. Н. КОРОЛЕВ**  
**А. В. ОСТРОВСКАЯ**

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕПЛОТЕХНИКИ. ТЕПЛОПЕРЕНОС

Учебное пособие





Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. Н. Королев, А. В. Островская

# **Теоретические основы теплотехники. Теплоперенос**

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся  
по направлению подготовки  
13.03.03 — Энергетическое машиностроение

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2021

УДК 621.1.016(075.8)

ББК 31.31я73

К68

Рецензенты:

завкафедрой д-р техн. наук, проф. *А. Г. Гороховский* (кафедра управления в технологических системах и инновационных технологиях Уральского государственного лесотехнического университета);

канд. техн. наук, доц. *В. Ю. Красных* (зам. начальника Югорского управления по ДТОиР филиала ООО «Газпром инвест» «Газпром ремонт»)

**Королев, В. Н.**

К68 Теоретические основы теплотехники. Теплоперенос : учебное пособие / В. Н. Королев, А. В. Островская ; М-во науки и высш. обр. РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2021. — 206 с.

ISBN 978-5-7996-3333-2

Пособие ориентирует студентов на самостоятельное проведение инженерных расчетов. Для этого каждый теоретический раздел пособия заканчивается примерами расчета задач прикладного характера, в конце книги — приложение, содержащее обширный справочный материал.

Издание предназначено для студентов третьего курса, обучающихся по направлению подготовки 13.03.03 — Энергетическое машиностроение, и может использоваться студентами других направлений, изучающих основы теплопереноса.

Библиогр.: 11 назв. Рис. 62. Прил. 5.

УДК 621.1.016(075.8)

ББК 31.31я73

ISBN 978-5-7996-3333-2

© Уральский федеральный  
университет, 2021



## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.03 — Энергетическое машиностроение, образовательная траектория — Газотурбинные, паротурбинные установки и двигатели (прикладной бакалавриат). При написании данного материала учитывалось, что студенты, обучающиеся по системе прикладного бакалавриата, изначально ориентированы на работу в конкретной компании, в данном случае — в компании «Газпрома». Многолетний опыт работы со студентами этой категории показывает, что лекционный материал усваивается лучше и легче, если изложение закономерностей теплопереноса подкрепляется примерами их практического использования. Поэтому каждый раздел заканчивается примерами практического применения излагаемого теоретического материала, причем решаемые задачи в той или иной степени связаны с тепловым оборудованием, имеющим место в компании «Газпрома». Для удобства расчетов в пособии приведен обширный справочный материал.

Пособие будет полезно студентам, занимающимся online, или тем студентам, которые по каким-либо причинам пропускают лекционные и практические занятия, так как данное издание дает возможность самостоятельно изучать дисциплину и нарабатывать практику в решении задач, связанных с процессами теплопереноса.

## ВВЕДЕНИЕ

---

**Т**еплоперенос — это наука о закономерностях переноса теплоты в окружающем нас пространстве [1, 2].

Теплопереносом называют учение о самопроизвольных необратимых процессах переноса теплоты в пространстве с неодинаковым распределением температур.

Теплоперенос может иметь место в твердых телах и в жидкостях. Под жидкостью будем понимать любую текучую среду (вода, воздух, природный газ, жидкие металлы и т. п.).

**Способы переноса теплоты в пространстве.** Различают три способа переноса теплоты в пространстве: теплопроводность, конвекция и излучение.

Теплопроводность — это процесс распространения теплоты при непосредственном соприкосновении отдельных тел или частей одного и того же тела, имеющих разную температуру. В твердых телах теплота передается только теплопроводностью.

Конвекция теплоты — перенос теплоты при перемещении объемов жидкости в пространстве из области с одной температурой в область с другой температурой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды. Наряду с конвекцией в жидкостях теплота передается и теплопроводностью. Совместный перенос теплоты теплопроводностью и конвекцией в жидкостях называют конвективным теплообменом.

Тепловое излучение — процесс распространения тепловой энергии с помощью электромагнитных волн. Тепловое излучение имеет место в прозрачных для электромагнитных волн средах и в вакууме.

**Процессы теплоотдачи и теплопередачи.** В технике перенос теплоты

---

очень часто происходит совместно всеми тремя способами, т. е. имеет место сложный теплообмен. Среди сложных процессов переноса теплоты наибольшее значение имеют процессы теплоотдачи и теплопередачи.

Теплоотдача — процесс переноса теплоты от жидкости к твердой стенке (или наоборот).

Теплопередача — процесс передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку.

*Замечание.* Индексами «с» и «ж» будем обозначать параметры, относящиеся соответственно к поверхности (стенке) и к жидкости. Например:  $t_c$  — температура стенки,  $t_j$  — температура жидкости.

**Сплошная среда. Изотропные и анизотропные среды.** Пространство, в котором протекают процессы теплопереноса, рассматривается как сплошная среда (континуум), т. е. среда, дискретностью строения которой пренебрегают.

Различают изотропные и анизотропные среды. В изотропной среде в любой ее точке физические свойства не зависят от выбранного направления. В анизотропной среде некоторые свойства в данной точке могут быть функцией направления.

**Виды тепловых потоков.** Для количественной характеристики переноса теплоты используются следующие виды тепловых потоков:

$Q_\tau$ , Дж — полное количество теплоты, которое передается через поверхность ( $F$ ) тела за время  $\tau$ ;

$Q = \frac{dQ_\tau}{d\tau}$ , Дж/с, Вт — тепловой поток — количество теплоты, которое передается через поверхность ( $F$ ) тела за единицу времени;

$q = \frac{dQ}{dF}$ , Вт/м<sup>2</sup>, — плотность теплового потока — тепловой поток, проходящий через единицу поверхности в единицу времени. Плотность теплового потока ( $q$ ) является векторной величиной. Вектор плотности теплового потока изотропного тела направлен перпендикулярно к изотермической поверхности от более нагретой к менее нагретой точке тела;

$q_l = \frac{dQ}{dl}$ , Вт/м, — линейная плотность теплового потока, т. е. тепло-

вой поток с единицы длины;

$q_v = \frac{dQ}{dV}$ , Вт/м<sup>3</sup>, — объемная плотность внутренних источников те-

плоты, т. е. тепловой поток с единицы объема тела. Примером внутренних источников теплоты может быть выделение теплоты при прохождении электрического тока по проводнику вследствие его сопротивления или выделение теплоты внутри тепловыделяющих элементов ядерных реакторов в ходе ядерной реакции.

Последовательно изучим перенос теплоты теплопроводностью, конвекцией и излучением, а в конце курса изучим основы теплового расчета теплообменных аппаратов, в которых имеет место сложный теплообмен.

# Глава 1

## ТЕПЛООБМЕН ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

---

### 1.1. Основные понятия и определения

---

**Температурное поле.** Основной задачей теории теплопроводности является изучение пространственно-временного изменения температуры тела, т. е. нахождение зависимости температуры от координат точек тела  $(x, y, z)$  и времени  $\tau$ :

$$t = f(x, y, z, \tau). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) представляет собой в самом общем виде математическое выражение температурного поля.

Температурным полем называют совокупность мгновенных значений температуры во всех точках тела для каждого момента времени. Температурное поле может быть нестационарным, если температура тела изменяется не только в пространстве, но и с течением времени (1.1), и стационарным:

$$\partial t / \partial \tau = 0, \quad t = f(x, y, z), \quad (1.2)$$

если температура тела не изменяется во времени, т. е. является только функцией координат.

**Температурный градиент.** При любом температурном поле в среде всегда имеются точки с одинаковой температурой. Геометрическое место таких точек образует изотермическую поверхность. Пересечение

изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Температура в среде изменяется лишь в направлении, пересекающем изотермы. При этом наиболее сильное изменение температуры получается в направлении нормали к изотермам (рис. 1.1). Предел отношения изменения температуры между соседними изотермами к расстоянию между ними по нормали называется температурным градиентом и обозначается одним из следующих символов:

$$\lim(\Delta t / \Delta n)_{\Delta n \rightarrow 0} = \partial t / \partial n = \text{grad} t = \nabla t. \quad (1.3)$$

Температурный градиент является вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону большей температуры, имеет размерность [K/м].

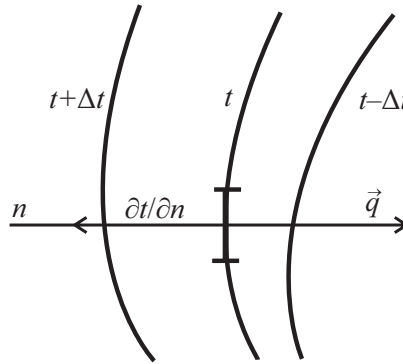


Рис. 1.1. Семейство изотерм в неравномерно нагретом теле

**Основной закон теплопроводности (закон Био — Фурье).** Согласно второму закону термодинамики плотность теплового потока направлена по нормали к поверхности в сторону меньшей температуры (рис. 1.1), поэтому зависимость между температурным градиентом и плотностью теплового потока можно записать в следующем виде:

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} t}. \quad (1.4)$$

Знак *минус* в правой части уравнения (1.4) указывает на то, что векторы  $\vec{q}$  и  $\text{grad} t$  направлены в разные стороны (плотность теплового потока направлена в сторону уменьшения, а градиент температуры — в сторону увеличения температуры). Уравнение (1.4) служит математическим выражением закона Био — Фурье — закона распространения теплоты теплопроводностью. Этот закон можно сформулировать сле-

дующим образом: вектор плотности теплового потока в данной точке в данный момент времени пропорционален температурному градиенту в той же точке в тот же момент времени.

**Коэффициент теплопроводности.** Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  в уравнении (1.4) называется коэффициентом теплопроводности, характеризует способность тела проводить теплоту. Является теплофизическим параметром вещества, имеет размерность  $[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]$  (П. 1). На величину  $\lambda$  влияет много факторов: температура, давление, структура тела, влажность и т. д.

Теплопроводность в газах осуществляется за счет диффузии молекул и столкновения их между собой. Поскольку с ростом температуры скорость движения молекул возрастает, то будет увеличиваться и коэффициент теплопроводности. При заданной температуре от давления величина  $\lambda$  практически не зависит (исключение составляют лишь сильно разреженные газы, когда длина свободного пробега молекул сравнима с размерами пространства, занимаемого газом). Значения коэффициентов теплопроводности различных газов изменяются в пределах  $0,006 \dots 0,6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .

В капельных жидкостях перенос теплоты осуществляется упругими волнами (путем обмена энергией при соударениях молекул). Величина коэффициента теплопроводности капельных жидкостей изменяется в диапазоне  $0,09 \dots 0,7 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . С ростом температуры коэффициент теплопроводности практически у всех капельных жидкостей уменьшается [3].

В твердых телах (чистых металлах и сплавах) теплота передается в основном за счет движения свободных электронов. Для этих тел величина коэффициента теплопроводности находится в пределах  $7,5 \dots 420 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Самыми теплопроводными материалами являются серебро, медь, золото и алюминий. Наличие в металлах примесей снижает диффузию свободных электронов, поэтому  $\lambda$  сплавов меньше, чем чистых металлов.

К твердым телам (неметаллам) относится обширный класс веществ, начиная от дисперсных материалов (например, песок) до кристаллов. Поэтому и коэффициент теплопроводности неметаллов изменяется в широких пределах:  $0,02 \dots 20 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  и выше. Механизм передачи теплоты разнообразен. Например, в полупроводниках и кристаллах теплота переносится как электронами, так и путем упругих колебаний узлов кристаллической решетки (фононов).

Величина коэффициента теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов находится в пределах  $0,02...3,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ . Более высокие значения  $\lambda$  имеют материалы с большей плотностью. Для влажного материала  $\lambda$  значительно выше, чем для сухого и воды в отдельности. Например, для сухого красного кирпича  $\lambda = 0,35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ , для воды  $\lambda \sim 0,6 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ , а для влажного кирпича  $\lambda = 1,05 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ .

Значения коэффициентов теплопроводности твердых тел, капельных жидкостей и газов приводятся в справочниках (см. П. 1).

## 1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности для твердого тела

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропное неравномерно нагретое тело, объем которого  $V$ , а поверхность  $F$  (рис. 1.2). Требуется найти закономерность измерения температуры в твердом теле  $t = f(x, y, z, \tau)$ .

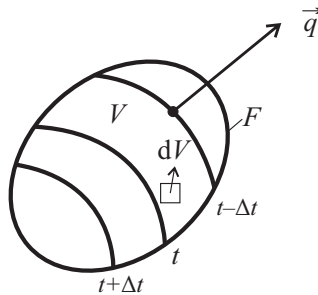


Рис. 1.2. Неравномерно нагретое тело

Выделим в этом теле элементарный объем  $dV$ , ограниченный поверхностью  $dF$ . Выделенный элементарный объем  $dV$  настолько мал, что изменением температуры внутри него по координатам можно пренебречь, учитывая лишь изменение температуры во времени. Выделенный объем  $dV$  будем рассматривать в качестве термодинамической системы. Запишем для нее первый закон термодинамики:  $dQ = dH + dL'$ , где  $dL' = -Vdp$  — работа сил упругих деформаций в твердом теле при постоянном давлении равна нулю. Теплота  $dQ$  представляет собой сумму теплоты, выделяемой внутри объема тела ( $dQ_v$ ), и теплоты, поступающей через поверхность извне ( $dQ_\tau$ ), т. е.  $dQ = dQ_\tau + dQ_v$ . Тогда



$$dQ_\tau + dQ_v = dH. \quad (1.5)$$

Количество теплоты, проходящей через поверхность тела за время  $d\tau$ :

$$dQ_\tau = -d\tau \int_F q dF. \quad (1.6)$$

Знак *минус* появился потому, что теплота отводится от системы, т. е. с точки зрения термодинамики теплота отрицательная (покидает объем тела). Теплота, выделяемая внутри объема тела за время  $d\tau$ , определяется по формуле

$$dQ_v = d\tau \int_V q_v dV. \quad (1.7)$$

Изменение энтальпии за время  $d\tau$ :

$$dH = d\tau \int_V \frac{d}{d\tau} (h dM) = d\tau \int_V \frac{d}{d\tau} (c_p t \rho dV) = d\tau \int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.6)—(1.8) в (1.5), получаем

$$d\tau \int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = -d\tau \int_F q dF + d\tau \int_V q_v dV.$$

Сокращая на  $d\tau$ , имеем

$$\int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = - \int_F q dF + \int_V q_v dV. \quad (1.9)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского — Гаусса, согласно которой интеграл потока вектора поля через замкнутую поверхность  $F$  равен интегралу от дивергенции этого потока вектора поля по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $F$ , т. е.  $\int_F \vec{q} d\vec{F} = \int_V \text{div} \vec{q} dV$ .

Учитывая это, уравнение (1.9) запишется в виде

$$\int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = - \int_V \text{div} q dV + \int_V q_v dV \quad \text{или} \quad \int_V \left( c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \text{div} q - q_v \right) dV = 0. \quad (1.10)$$

Учитывая, что интеграл равен нулю, когда подынтегральное выражение равно нулю, имеем  $c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \text{div} q - q_v = 0$ .

Подставляя значение  $q$  согласно (1.4), получим

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \text{div}(-\lambda \nabla t) - q_v = 0. \quad (1.11)$$

В декартовых координатах  $\operatorname{div}(\nabla t) = \nabla^2 t = \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$ . Подставляя это выражение в (1.11), имеем

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} - \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - q_v = 0, \quad (1.12)$$

откуда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (1.13)$$

Величина  $\frac{\lambda}{c_p \rho} = a$ , м<sup>2</sup>/с, называется коэффициентом температуропроводности. Коэффициент температуропроводности является теплофизическим параметром: характеризует теплоинерционные свойства тела или скорость изменения температуры в среде. Уравнение (1.13), записанное через коэффициент температуропроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho} \quad (1.14)$$

является дифференциальным уравнением теплопроводности для твердого тела.

### Частные случаи дифференциального уравнения теплопроводности

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности без внутренних источников теплоты ( $q_v = 0$ ):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (1.15)$$

2. Дифференциальное уравнение теплопроводности без внутренних источников теплоты в цилиндрических координатах.

В цилиндрических координатах, в которых  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ , где  $r$  — радиус-вектор,  $\varphi$  — полярный угол, уравнение (1.15) будет иметь вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (1.16)$$

**Условия однозначности для процессов теплопроводности.** Дифференциальное уравнение теплопроводности описывает явление теплопроводности в общем виде. Для получения аналитического описания конкретного процесса необходимо указать его частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности и называются условиями однозначности или краевыми условиями.

Условия однозначности включают в себя:

- геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- физические условия, характеризующие физические и теплофизические свойства тела;
- временные или начальные условия, характеризующие распределение температуры в теле в начальный момент времени;
- граничные условия, характеризующие условия взаимодействия между рассматриваемым телом и окружающей средой.

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

Граничными условиями первого рода задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x_c, y_c, z_c, \tau). \quad (1.17)$$

Граничными условиями второго рода задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени:

$$q_c = f(x_c, y_c, z_c, \tau). \quad (1.18)$$

Граничными условиями третьего рода задаются температура окружающей среды  $t_{\text{ж}}$  и закон теплоотдачи между телом и средой:

$$q = \alpha(t_c - t_{\text{ж}}). \quad (1.19)$$

Согласно этому закону плотность теплового потока  $q$  на поверхности тела пропорциональна разности температур поверхности стенки и окружающей среды. Коэффициент пропорциональности в этом уравнении называют коэффициентом теплоотдачи и обозначают как  $\alpha$ , [Вт/(м<sup>2</sup>·К)]. Он характеризует интенсивность теплопереноса между поверхностью тела и окружающей средой. С другой стороны, эту же плотность теплового потока можно найти из уравнения (1.4):

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1.20)$$

где индекс «с» указывает на то, что градиент температуры рассчитывается на поверхности тела. Приравнявая уравнения (1.19) и (1.20), получаем аналитическое выражение для граничных условий третьего рода:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_c - t_{\text{ж}}). \quad (1.21)$$

Граничными условиями четвертого рода рассматривается случай, когда два или большее количество тел плотно соприкасаются между собой. Если тепловые потери в месте контакта отсутствуют, то тепловой поток, прошедший через поверхность одного тела, пройдет и через поверхность другого тела:

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_1 = -\lambda_2 \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_2.$$

### 1.3. Теплопроводность

**при стационарном режиме ( $\partial t / \partial t = 0$ )**

**в отсутствие внутренних источников теплоты ( $q_v = 0$ )**

#### 1.3.1. Теплопроводность плоской стенки при граничных условиях первого рода

Однослойная плоская стенка

**Постановка задачи.** Имеется однородная изотропная стенка толщиной  $\delta$  с постоянным коэффициентом теплопроводности (рис. 1.3).

Заданы граничные условия первого рода, т. е. температуры на внутренней и наружной поверхностях стенки: при  $x = 0$   $t = t_{c_1} = \text{const}$ , при  $x = \delta$   $t = t_{c_2} = \text{const}$ . По осям  $y$  и  $z$  размеры стенки бесконечно большие (более чем на порядок превосходят размер стенки по оси  $x$ ). При таких условиях температура в стенке будет изменяться лишь в направлении оси  $x$ .

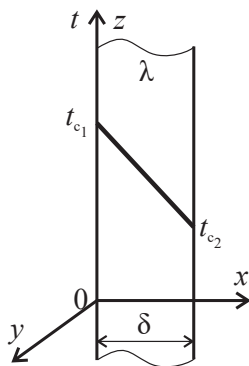


Рис. 1.3. К задаче по теплопроводности через однослойную плоскую стенку

Требуется найти закон распределения температуры по толщине стенки  $t = f(x)$  и получить формулы для расчета теплового потока ( $Q$ ) и его плотности ( $q$ ).

Для нахождения закона распределения температуры по толщине стенки воспользуемся дифференциальным уравнением теплопроводности (1.15) с учетом того, что  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$  (задача стационарная),  $\frac{d^2 t}{dy^2} = 0$  и  $\frac{d^2 t}{dz^2} = 0$  (температура по осям  $y$  и  $z$  не изменяется, так как размеры стенки по этим осям бесконечно большие). При этих условиях уравнение (1.15) упрощается:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0, \text{ или } \frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1.22)$$

Так как вторая производная равна нулю, то первая производная  $\frac{dt}{dx} = C_1$ , где  $C_1$  константа. Разделяя переменные, имеем  $dt = C_1 \cdot dx$ . Решая данное уравнение, получаем общее решение

$$t = C_1 x + C_2, \quad (1.23)$$

где постоянные интегрирования находятся из граничных условий: при  $x = 0$   $t = t_{c1}$ ; при  $x = \delta$   $t = t_{c2}$ . Подставляя последовательно эти условия в (1.23), находим постоянные интегрирования  $C_2 = t_{c1}$ ,  $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}$  и получаем закон распределения температуры по толщине плоской стенки

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) показывает, что температура по толщине плоской стенки изменяется по линейному закону.

Плотность теплового потока определяется по уравнению (1.4). Градиент температуры  $\frac{dt}{dx}$  находится из уравнения (1.24):  $\frac{dt}{dx} = -\frac{t_{c_1} - t_{c_2}}{\delta}$ .

Подставляя это выражение в (1.4), получаем формулы для плотности теплового потока ( $q$ ) и теплового потока ( $Q$ ):

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c_1} - t_{c_2}), \quad Q = qF = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c_1} - t_{c_2}) F. \quad (1.25)$$

#### Многослойная плоская стенка

В случае плоской многослойной стенки (рис. 1.4) с идеальным контактом между соприкасающимися слоями тепловой поток, который передается теплопроводностью через первый слой, пройдет через каждый последующий слой (согласно граничным условиям четвертого рода).

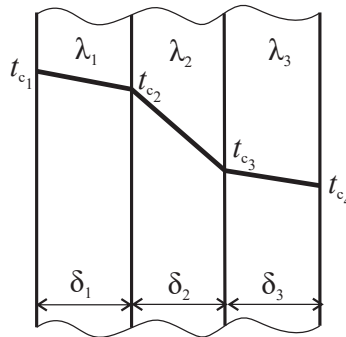


Рис. 1.4. К задаче по теплопроводности через многослойную плоскую стенку

Записывая формулу (1.25) для каждого из  $n$  слоев стенки, а затем выражая разность температур и суммируя их, получаем

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_{c_1} - t_{c_2}) \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = q \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_{c_2} - t_{c_3}) \rightarrow t_{c_2} - t_{c_3} = q \frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n} (t_{c_n} - t_{c_{n+1}}) \rightarrow t_{c_n} - t_{c_{n+1}} = q \frac{\delta_n}{\lambda_n}, \end{aligned} \right\} +$$

следовательно, получаем

$$t_{c_n} - t_{c_{n+1}} = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right).$$

Отсюда

$$q = \frac{t_{c_1} - t_{c_{n+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad Q = qF = \frac{t_{c_1} - t_{c_{n+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} F. \quad (1.26)$$

В формуле (1.26)  $\delta/\lambda$  называется термическим сопротивлением теплопроводности. Чем больше термическое сопротивление стенки, тем значительнее различаются величины температур на ее поверхностях. Например, термическое сопротивление первого слоя стенки (рис. 1.4) меньше, чем второго.

### 1.3.2. Теплопроводность плоской стенки при граничных условиях третьего рода (теплопередача через плоскую стенку)

Однослойная стенка

**Постановка задачи.** Пусть одна из сторон плоской стенки (рис. 1.5) омывается жидкостью с температурой  $t_{ж_1} = \text{const}$ , а другая — жидкостью с температурой  $t_{ж_2} = \text{const}$  ( $t_{ж_1} > t_{ж_2}$ ). Коэффициенты теплоотдачи с одной стороны стенки и с другой известны:  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\alpha_2 = \text{const}$ . Коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda = \text{const}$ .

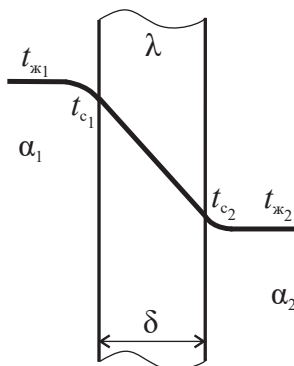


Рис. 1.5. К задаче по теплопередаче через однослойную плоскую стенку

Требуется найти тепловой поток, передаваемый от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку.

Процесс теплопередачи это сложный процесс, состоящий из двух процессов теплоотдачи и процесса теплопроводности. Теплота, передаваемая от жидкости с температурой  $t_{ж_1}$  к стенке, согласно уравнению теплоотдачи (1.19), найдется как  $q = \alpha_1(t_{ж_1} - t_{c_1})$ . Эта же теплота будет передана через стенку в процессе теплопроводности (1.25)  $q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c_1} - t_{c_2})$ , а дальше эта теплота будет отведена к жидкости с температурой  $t_{ж_2}$  в процессе теплоотдачи  $q = \alpha_2(t_{c_2} - t_{ж_2})$ . Запишем эти уравнения, выразим из них разности температур и просуммируем, чтобы неизвестные температуры  $t_{c_1}$  и  $t_{c_2}$  сократились:

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha_1(t_{ж_1} - t_{c_1}) & t_{ж_1} - t_{c_1} &= q \frac{1}{\alpha_1}, \\ q &= \frac{\lambda}{\delta}(t_{c_1} - t_{c_2}) & t_{c_1} - t_{c_2} &= q \frac{\delta}{\lambda}, \\ q &= \alpha_2(t_{c_2} - t_{ж_2}) & t_{c_2} - t_{ж_2} &= q \frac{1}{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} +$$

Получаем  $t_{ж_1} - t_{ж_2} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$ , откуда находим выражение для

расчета плотности теплового потока  $q = \frac{t_{ж_1} - t_{ж_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ , а зная площадь по-

верхности стенки и находим тепловой поток

$$Q = qF. \quad (1.27)$$

Формулы (1.27) можно записать компактнее:

$$q = k(t_{ж_1} - t_{ж_2}), \quad Q = k(t_{ж_1} - t_{ж_2})F, \quad (1.28)$$

где  $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$  — коэффициент теплопередачи, [Вт/(м<sup>2</sup>·К)], харак-

теризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к дру-



гой через разделяющую их стенку. Выражение  $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$  представляет собой сумму термических сопротивлений процесса теплопроводности ( $\delta/\lambda$ ) и процессов теплоотдачи ( $1/\alpha$ ).

#### Многослойная стенка

Если плоская стенка  $n$ -слойная, то ход решения задачи такой же, как и для однослойной стенки, только вместо одного термического сопротивления теплопроводности  $\delta/\lambda$  будет  $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ . Формула для расчета теплопередачи через  $n$ -слойную стенку имеет вид

$$q = \frac{t_{ж_1} - t_{ж_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad Q = qF. \quad (1.29)$$

#### Примеры решения задач по теме «Стационарная теплопроводность и теплопередача через плоские стенки»

**Пример 1.** Для постройки временного жилища у арктической экспедиции имеются в распоряжении: доски сосновые толщиной  $\delta_1 = 50$  мм и снег. Какой оптимальной толщины должен быть слой снега, чтобы температура стенки внутри жилища была  $t_{c_1} = 10^\circ\text{C}$  при температуре снега снаружи  $t_{c_2} = -45^\circ\text{C}$ ?

*Решение.* В данной задаче имеет место процесс теплопроводности через двухслойную плоскую стенку. Прежде всего необходимо принять решение относительно температуры на стыке слоев досок и снега при его оптимальной толщине. Температура на стыке снега и доски должна быть  $0^\circ\text{C}$ , чтобы снег не таял.

Выпишем из табл. П. 1.1 коэффициенты теплопроводности сосновой доски и снега:  $\lambda_1 = 0,107$  Вт/(м·К);  $\lambda_2 = 0,465$  Вт/(м·К) соответственно.

Тепловой поток, передающийся через первый и второй слои конструкции стенки (рис. 1.6), одинаковый (выполняются граничные условия четвертого рода).

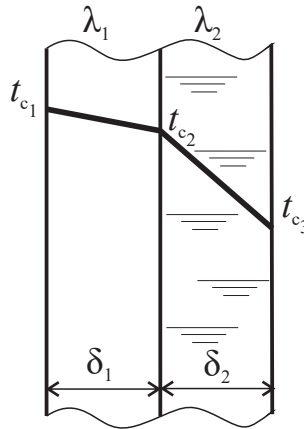


Рис. 1.6. Двухслойная плоская стека с известными температурами на ее внутренней и наружной поверхности

Поэтому запишем формулу (1.26) для теплового потока, проходящего через первый  $q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c_1} - t_{c_2})$  и второй  $q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{c_2} - t_{c_3})$  слоя стенки.

Приравнявая правые части формул  $\frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c_1} - t_{c_2}) = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{c_2} - t_{c_3})$ , выразим искомую величину (толщину снега):

$$\delta_2 = \frac{\lambda_2}{\frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c_1} - t_{c_2})}(t_{c_2} - t_{c_3}) = \frac{0,465(0 - (-45))}{\frac{0,107}{5 \cdot 10^{-2}}(10 - 0)} = 0,98 \text{ м.}$$

**Пример 2.** Вычислить тепловые потери через  $1 \text{ м}^2$  поверхности стенки, выполненной из строительного кирпича (рис. 1.7) и определить температуру на ее внутренней и наружной стороне, если заданы следующие величины: температура среды с одной стороны стенки  $t_{ж_1} = 30^\circ \text{C}$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; с другой стороны стенки  $t_{ж_2} = -20^\circ \text{C}$ ,  $\alpha_2 = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda = 0,25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , толщина стенки  $\delta = 500 \text{ мм}$ .

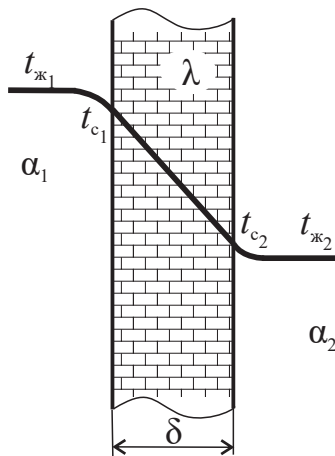


Рис. 1.7. Однослойная плоская стенка с известными температурами жидкостей с одной и другой сторон

*Решение.* Теплота передается от одной жидкостки к другой через плоскую стенку, т. е. имеет место процесс теплопередачи. Воспользуемся формулой (1.27) и рассчитаем плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{30 - (-20)}{\frac{1}{10} + \frac{0,5}{0,25} + \frac{1}{50}} = 23,6 \text{ Вт/м}^2.$$

Для определения температур  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$  запишем формулы для процессов теплоотдачи от жидкостки с температурой  $t_{ж1}$  к поверхности стенки, температура которой  $t_{c1}$ ,  $q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1})$  и от наружной стенки, температура которой  $t_{c2}$ , к среде с температурой  $t_{ж2}$   $q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2})$ .

Поскольку величина плотности теплового потока известна, то найдем  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ .

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}) \rightarrow t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q}{\alpha_2} = -20 + \frac{23,6}{50} = -19,53^\circ\text{C},$$

$$q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}) \rightarrow t_{c1} = t_{ж1} - \frac{q}{\alpha_1} = 30 - \frac{23,6}{10} = 27,64^\circ\text{C}.$$

### 1.3.3. Теплопроводность цилиндрической стенки при граничных условиях первого рода

Однослойная стенка

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородную изотропную цилиндрическую стенку (рис. 1.8) с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным —  $r_2$ . Коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda = \text{const}$ . На внутренней поверхности стенки поддерживается температура  $t_{c_1} = \text{const}$ , а на наружной —  $t_{c_2} = \text{const}$  (т. е. заданы граничные условия первого рода). Высота стенки (по оси  $z$ ) бесконечно большая. В этих условиях температурное поле  $t = f(r)$  будет одномерным.

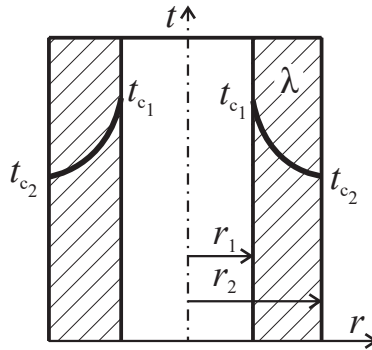


Рис. 1.8. К задаче по теплопроводности через цилиндрическую стенку

Необходимо найти закон изменения температуры  $t = f(r)$ , плотность теплового потока и тепловой поток через цилиндрическую стенку.

Для нахождения температурного поля  $t = f(r)$  запишем дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах (1.16), учитывая, что  $\partial t / \partial \tau = 0$ , так как задача стационарна,  $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$  и  $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$  (температура по полярному углу и высоте стенки не изменяется):

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (1.30)$$

Для решения уравнения (1.30) обозначим  $dt/dr = u$ , тогда  $du/dr + u/r = 0$ . Разделяя переменные  $du/u + dr/r = 0$  и интегрируя, получаем  $\ln u + \ln r = \ln C_1$ , или  $u = C_1/r$ .

Возвращаясь к первоначальной переменной  $dt/dr = C_1/r$ , разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение уравнения (1.30):

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (1.31)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  запишем граничные условия: при  $r=r_1$   $t=t_{c_1}$ , при  $r=r_2$   $t=t_{c_2}$ .

Подставляя эти условия в (1.31), имеем

$$t_{c_1} = C_1 \ln r_1 + C_2, \quad t_{c_2} = C_1 \ln r_2 + C_2. \quad (1.32)$$

Решая систему (1.32), находим  $C_1$  и  $C_2$ , подстановка значений которых в (1.31) позволяет получить закон изменения температуры по толщине цилиндрической стенки

$$t = t_{c_1} + \frac{t_{c_1} - t_{c_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1}. \quad (1.33)$$

Из (1.33) следует, что температура по толщине стенки изменяется по логарифмическому закону.

Тепловой поток через цилиндрическую стенку (трубу) длиной  $l$  можно найти по закону (1.4):

$$Q = q \cdot F = -\lambda \frac{dt}{dr} 2 \pi r l. \quad (1.34)$$

Используя выражение (1.33), найдем производную  $\frac{dt}{dr} = \frac{t_{c_1} - t_{c_2}}{r \ln \frac{r_1}{r_2}}$  и подставим в (1.34). Тогда  $Q = -\lambda \frac{t_{c_1} - t_{c_2}}{r \ln \frac{r_1}{r_2}} 2 \pi r l$ , или после сокращения

на текущий радиус  $r$  и умножения числителя и знаменателя на минус единицу получим

$$Q = \frac{2 \lambda \pi l (t_{c_1} - t_{c_2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{(t_{c_1} - t_{c_2}) \pi l}{\frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{(t_{c_1} - t_{c_2}) \pi l}{\frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (1.35)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины цилиндрической стенки (трубы), называется линейной плотностью теплового потока и обозначается как  $q_l$ , Вт/м:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{(t_{c_1} - t_{c_2})\pi}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{(t_{c_1} - t_{c_2})\pi}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (1.36)$$

### Многослойная стенка

В случае многослойной цилиндрической стенки (рис. 1.9) с идеальным контактом между соприкасающимися слоями (выполняются граничные условия четвертого рода), для каждого слоя, если их  $n$ , линейную плотность теплового потока можно найти по формуле (1.36).

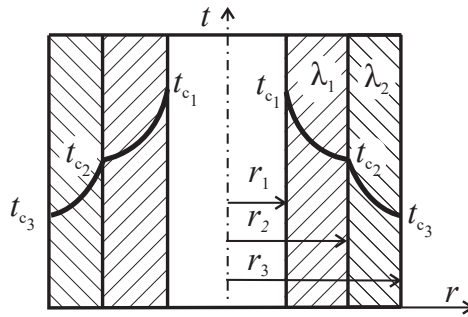


Рис. 1.9. К задаче по теплопроводности через многослойную цилиндрическую стенку

Выразив разности температур и сложив полученные значения

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \frac{(t_{c_1} - t_{c_2})\pi}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}} \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}, \\ q_l &= \frac{(t_{c_1} - t_{c_2})\pi}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}, \\ q_l &= \frac{(t_{c_n} - t_{c_{n+1}})\pi}{\frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n}} \rightarrow t_{c_n} - t_{c_{n+1}} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n}, \end{aligned} \right\} +$$

получим

$$t_{c_1} - t_{c_{n+1}} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots + \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \right).$$

Откуда найдем выражение для расчета линейной плотности теплового потока через многослойную цилиндрическую стенку:

$$q_l = \frac{(t_{c_1} - t_{c_{n+1}}) \pi}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} = \frac{(t_{c_1} - t_{c_{n+1}}) \pi}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (1.37)$$

В этой формуле выражение  $\frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$  называется термическим сопротивлением теплопроводности  $i$ -го слоя цилиндрической стенки.

### 1.3.4. Теплопроводность цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода (теплопередача через цилиндрическую стенку)

Однослойная стенка

**Постановка задачи.** Пусть внутренняя поверхность (рис. 1.10) цилиндрической стенки омывается жидкостью с температурой  $t_{ж_1} = \text{const}$ , а наружная — жидкостью с температурой  $t_{ж_2} = \text{const}$  ( $t_{ж_1} > t_{ж_2}$ ). Коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  известны. Коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda = \text{const}$ . Требуется найти линейную плотность теплового потока, передаваемого через стенку.

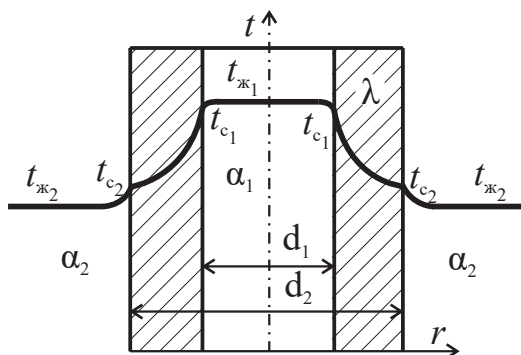


Рис. 1.10. К задаче по теплопередаче через цилиндрическую стенку

Теплота от жидкости с температурой  $t_{ж_1}$  будет передаваться внутренней поверхности стенки. Это процесс теплоотдачи. Линейная плотность теплового потока в этом процессе  $q_l = \alpha_1 (t_{ж_1} - t_{c_1}) \pi d_1$ .

Этот же тепловой поток пройдет теплопроводностью через стенку:

$$q_l = \frac{(t_{c_1} - t_{c_2}) \pi}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}},$$

а дальше теплота будет отдана в среду с температурой  $t_{ж_2}$  в процессе теплоотдачи:  $q_l = \alpha_2 (t_{c_2} - t_{ж_2}) \pi d_2$ .

Выразим из каждого уравнения разность температур, а затем их просуммируем, чтобы неизвестные температуры  $t_{c_1}$  и  $t_{c_2}$  сократились:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 (t_{ж_1} - t_{c_1}) \pi d_1 \rightarrow t_{ж_1} - t_{c_1} = \frac{q_l}{\pi \alpha_1 d_1}, \\ q_l &= \frac{(t_{c_1} - t_{c_2}) \pi}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}, \\ q_l &= \alpha_2 (t_{c_2} - t_{ж_2}) \pi d_2 \rightarrow t_{c_2} - t_{ж_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} +$$

Получим

$$t_{ж_1} - t_{ж_2} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right),$$

откуда

$$q_l = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2}) \pi}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad (1.38)$$

или  $q_l = k_l (t_{ж_1} - t_{ж_2}) \pi$ , где  $k_l$  — линейный коэффициент теплопередачи,

$$[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$



### Многослойная стенка

Для многослойной цилиндрической стенки линейная плотность теплового потока будет находиться по такой же схеме, как и для однослойной, за исключением того, что тепловой поток теплопроводностью пройдет не через один, а через  $n$  слоев стенки. Формула для расчета  $q_l$  для  $n$ -слойной цилиндрической стенки имеет вид

$$q_l = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2})\pi}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}, \quad Q = q_l \cdot l. \quad (1.39)$$

### 1.3.5. Приближенный расчет теплопередачи через цилиндрическую стенку

Используя выражение (1.38) для расчета линейной плотности теплового потока, запишем формулу для теплового потока, передающегося через цилиндрическую стенку трубы длиной  $l$  в процессе теплопередачи:

$$Q = q_l \cdot l = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2})\pi \cdot l}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

Умножим числитель и знаменатель формулы на  $d_2$ , получим

$$Q = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2})\pi \cdot d_2 \cdot l}{\frac{1 \cdot d_2}{\alpha_1 d_1} + \frac{1 \cdot d_2}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1 \cdot d_2}{\alpha_2 d_2}}. \quad (1.40)$$

В формуле (1.40)  $\pi \cdot d_2 \cdot l = F$  — площадь поверхности цилиндра (трубы). При незначительном отличии размеров внутреннего и наружного диаметров трубы  $\frac{d_2}{d_1} \rightarrow 1$   $\ln \frac{d_2}{d_1} \rightarrow 0$ . Поэтому уже при  $\frac{d_2}{d_1} < 2$  вместо точной формулы (1.39) расчет теплопередачи через цилиндрическую стенку трубы можно вести по приближенной формуле (погрешность не превышает 2 %):

$$Q = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2}) \cdot F}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (1.41)$$

где  $\delta = \frac{d_2 - d_1}{2}$ . Формулы (1.41) и (1.27) по написанию одинаковы.

### 1.3.6. Критический диаметр тепловой изоляции

Назначение тепловой изоляции — уменьшать потери теплоты в окружающую среду. Рассмотрим трубопровод, по которому течет жидкость с температурой  $t_{ж1} = \text{const}$ , а снаружи трубы находится жидкость с температурой  $t_{ж2} = \text{const}$ , причем  $t_{ж1} > t_{ж2}$ . Коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1, \alpha_2$  заданы.

Для уменьшения тепловых потерь нанесем слой тепловой изоляции на внешнюю поверхность трубы (рис. 1.11).

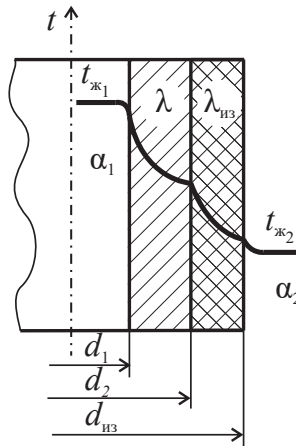


Рис. 1.11. Цилиндрическая стенка с нанесенным на нее слоем тепловой изоляции

Выясним, как влияет толщина (диаметр) тепловой изоляции на величину тепловых потерь  $q_l$ . Плотность теплового потока, передаваемая в процессе теплопередачи через двухслойную цилиндрическую стенку, определится по формуле (1.39):

$$q_l = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2}) \pi}{R_{\pi}}, \quad (1.42)$$

где  $R_{\Pi}$  — полное термическое сопротивление двухслойной цилиндрической стенки:  $R_{\Pi} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{из}}} \ln \frac{d_{\text{из}}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{\text{из}}}$ . Обозначим слагаемые, стоящие в правой части,  $R_{\Pi}, R_1, R_2, R_3, R_4$ . Тогда  $R_{\Pi} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ . Величины  $R_1$  и  $R_2$  не зависят от толщины изоляции ( $d_{\text{из}}$ ), а  $R_3$  и  $R_4$  — зависят, причем при увеличении  $d_{\text{из}}$  величина  $R_3$  увеличивается, а  $R_4$  — уменьшается (рис. 1.12). Полное термическое сопротивление  $R_{\Pi}$ , определяемое характером изменения составляющих  $R_3$  и  $R_4$ , имеет минимум. Диаметр изоляции, при котором имеет место минимум полного термического сопротивления теплопередачи, называется критическим диаметром изоляции и обозначается  $d_{\text{из(кр)}}$ .

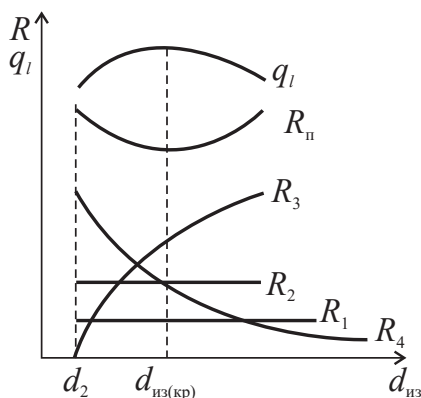


Рис. 1.12. Изменение линейной плотности теплового потока и полного термического сопротивления цилиндрической стенки с увеличением диаметра, наносимой на нее тепловой изоляции

При  $d_{\text{из(кр)}} > d_2$  с увеличением толщины изоляции  $R_{\Pi}$  уменьшается, а  $q_l$  (рис. 1.12) — возрастает. Если  $d_2 = d_{\text{из(кр)}}$ ,  $R_{\Pi}$  будет минимальное, а линейная плотность теплового потока  $q_l$  — максимальная. Для определения значения критического диаметра тепловой изоляции возьмем производную от  $R_{\Pi}$  по  $d_{\text{из}}$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dR_{\Pi}}{d(d_{\text{из}})} = \frac{1}{2\lambda_{\text{из}} d_{\text{из(кр)}}} - \frac{1}{\alpha_2 d_{\text{из(кр)}}^2} = 0.$$

Отсюда

$$d_{\text{из(кр)}} = 2\lambda_{\text{из}}/\alpha_2. \quad (1.43)$$

Для правильного выбора тепловой изоляции необходимо прежде рассчитать ее критический диаметр. Если критический диаметр окажется больше величины наружного диаметра трубы, то такую изоляцию использовать нецелесообразно, так как часть нанесенной такой тепловой изоляции размером  $(d_{\text{из(кр)}} - d_2)$  будет не уменьшать тепловые потери, а увеличивать их. Тепловая изоляция будет теплоизолировать с первых нанесенных на поверхность трубы миллиметров, если ее критический диаметр будет меньше диаметра неизолированного трубопровода.

### **Примеры решения задач по теме «Теплопроводность и теплопередача через цилиндрические стенки»**

**Пример 1.** В районах вечной мерзлоты природный газ транспортируется по трубопроводу, уложенному в земле. Температура земли минус  $5^\circ\text{C}$ . Труба стальная ( $\lambda_c = 45 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ), внутренний диаметр трубы 1400 мм, наружный — 1420 мм. Температура внутренней стенки трубы  $t_{c_1} = 10^\circ\text{C}$ . Трубопровод покрыт двумя слоями тепловой изоляции: слоем битума толщиной 10 мм ( $\lambda_b = 0,47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) и слоем пенополиуретана ( $\lambda_{\text{п}} = 0,029 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) толщиной 300 мм. Температура с внешней стороны тепловой изоляции, чтобы не нарушать условие вечной мерзлоты, должна быть равна температуре земли ( $t_{c_4} = -5^\circ\text{C}$ ). Вычислить тепловые потери с 1 м длины трубопровода и рассчитать температуру на стыке слоев изоляции.

Как изменятся тепловые потери и температура на стыке слоев изоляции, если слои изоляции поменять местами? Слой тепловой изоляции с меньшим коэффициентом теплопроводности наложить непосредственно на поверхность трубы. Все другие условия оставить без изменения.

*Решение.* В данной задаче имеет место процесс теплопроводности через трехслойную цилиндрическую стенку (рис. 1.13).

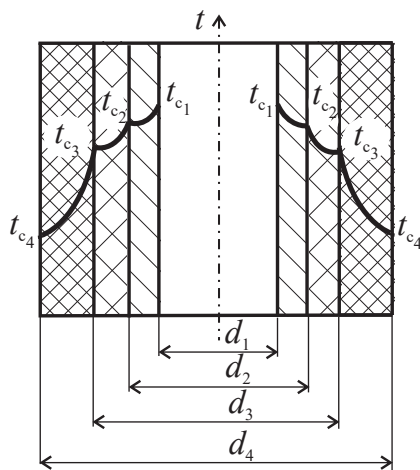


Рис. 1.13. Схематическое изображение трубопровода, покрытого двумя слоями тепловой изоляции

Трехслойная цилиндрическая стенка диаметрами, мм:  $d_1 = 1400$ ;  $d_2 = 1420$ ;  $d_3 = 1420 + 2 \cdot 10 = 1440$ ;  $d_4 = 1440 + 2 \cdot 300 = 2040$ . Тепловые потери на стыке слоев отсутствуют (выполняются граничные условия четвертого рода). Потери теплоты с 1 м длины трубопровода рассчитываем по формуле (1.37):

$$q_l = \frac{(t_{c1} - t_{c4})\pi}{\frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_6} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_4}{d_3}} =$$

$$= \frac{(10 - (-5))3,14}{\frac{1}{2 \cdot 45} \ln \frac{1420}{1400} + \frac{1}{2 \cdot 0,47} \ln \frac{1440}{1420} + \frac{1}{2 \cdot 0,029} \ln \frac{2040}{1440}} = 7,82 \text{ Вт/м.}$$

Так как тепловой поток, проходящий через каждый слой одинаковый, то для расчета температуры на стыке слоев изоляции воспользуемся формулой для линейной плотности теплового потока, проходящего через третий слой:

$$q_l = \frac{(t_{c3} - t_{c4})\pi}{\frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_4}{d_3}}$$

(через слой тепловой изоляции из пенополиуретана).

$$t_{c_3} = t_{c_4} + q_l \cdot \frac{1}{2\lambda_{\text{п}}} \ln \frac{d_4}{d_3} \cdot \frac{1}{\pi} = -5 + 7,82 \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,029} \ln \frac{2040}{1440} \cdot \frac{1}{3,14} = 9,93^\circ\text{C}.$$

Выясним, изменятся ли тепловые потери и температура на стыке слоев тепловой изоляции, если слой изоляции с меньшим коэффициентом теплопроводности (пенополиуритан) наложим прямо на стальную стенку, а слой битума — на слой пенополиуритана.

В этом случае диаметр, мм:  $d_1 = 1400$ ;  $d_2 = 1420$ ;  $d_3 = 1420 + 2 \cdot 300 = 2020$ ;  $d_4 = 2020 + 2 \cdot 10 = 2040$ .

$$q_l = \frac{(t_{c_1} - t_{c_4})\pi}{\frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{п}}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_6} \ln \frac{d_4}{d_3}} =$$

$$= \frac{(10 - (-5)) \cdot 3,14}{\frac{1}{2 \cdot 45} \ln \frac{1420}{1400} + \frac{1}{2 \cdot 0,029} \ln \frac{2020}{1420} + \frac{1}{2 \cdot 0,47} \ln \frac{2040}{2020}} = 7,75 \text{ Вт/м}.$$

$$t_{c_3} = t_{c_4} + q_l \cdot \frac{1}{2\lambda_{\text{п}}} \ln \frac{d_4}{d_3} \cdot \frac{1}{\pi} = -5 + 7,75 \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,47} \ln \frac{2040}{2020} \cdot \frac{1}{3,14} = -4,97^\circ\text{C}.$$

Таким образом, тепловые потери практически не изменяются, так как величина термического сопротивления теплопроводности  $\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right)$  мало зависит от перестановки слоев тепловой изоляции.

Температура на стыке слоев изоляции изменится, так как ее величина напрямую связана с термическим сопротивлением слоя тепловой изоляции: чем это сопротивление больше, тем больше градиент температуры.

**Пример 2.** Природный газ, температура которого после сжатия компрессором увеличивается, необходимо охладить перед транспортировкой по трубопроводу. Охлаждение происходит в аппаратах воздушного охлаждения (АВО газа). Определить количество теплоты, отводимое от газа протекающего по трубе внутренним диаметром 22 мм, наружным — 26 мм, за 1 час. Температура газа в трубе  $t_{ж_1} = 60^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи от газа к внутренней стенке трубы  $\alpha_1 = 70 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , температура наружного воздуха  $t_{ж_2} = 0^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи

от наружной стенки трубы к воздуху  $\alpha_2 = 15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Труба стальная ( $\lambda = 45 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) длиной 12 м.

*Решение.* Теплота передается от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку, следовательно, это процесс теплопередачи (см. рис. 1.10). Найдем тепловой поток, отводимый от газа к воздуху по формуле теплопередачи через однослойную цилиндрическую стенку (1.38):

$$Q = q_l \cdot l = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2}) \pi l}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} =$$

$$= \frac{(60 - 0) 3,14 \cdot 12}{\frac{1}{70 \cdot 0,022} + \frac{1}{2 \cdot 45} \ln \frac{0,026}{0,022} + \frac{1}{15 \cdot 0,026}} = 703,2 \text{ Вт}.$$

Количество теплоты, отводимое от газа за 1 час,

$$Q_\tau = Q \cdot \tau = 703,2 \cdot 3600 = 2,53 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

**Пример 3.** По трубе наружным диаметром  $d_2 = 120 \text{ мм}$  к дому подводится горячая вода. Для уменьшения тепловых потерь в окружающую среду трубопровод необходимо теплоизолировать. В наличии имеется шлаковата ( $\lambda = 0,47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ), стекловата ( $\lambda = 0,037 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) и пенополиуретан ( $\lambda = 0,029 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ). Какую тепловую изоляцию не целесообразно использовать для теплоизоляции трубопровода и почему? Коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности трубы в окружающую среду  $\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

*Решение.* Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо вычислить критический диаметр тепловой изоляции по формуле (1.43) для всех трех теплоизоляционных материалов:

- для шлаковаты

$$d_{\text{из(кр)}} = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,47}{5} = 0,188 \text{ м} = 188 \text{ мм};$$

- для стекловаты

$$d_{\text{из(кр)}} = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,037}{5} = 0,0148 \text{ м} = 14,8 \text{ мм};$$

- для пенополиуретана

$$d_{\text{из(кр)}} = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,029}{5} = 0,0116 \text{ м} = 11,6 \text{ мм.}$$

Сравнивая диаметр неизолированного трубопровода  $d_2$  с величиной критического диаметра  $d_{\text{из(кр)}}$  для соответствующего теплоизоляционного материала, делаем вывод, что для шлаковаты величина  $d_{\text{из(кр)}} > d_2$ . Следовательно, эту изоляцию использовать нецелесообразно, так как часть слоя этой тепловой изоляции толщиной  $\frac{188-120}{2} = 34 \text{ мм}$  будет не теплоизолировать, а наоборот увеличивать тепловые потери с поверхности трубопровода.

#### 1.4. Способы интенсификации теплопередачи

Тепловой поток в процессе теплопередачи рассчитывается по формуле (1.28):  $Q = k \Delta t F$ . Следовательно, интенсифицировать процесс теплопередачи можно за счет увеличения коэффициента теплопередачи  $k$  или разности температур жидкостей  $\Delta t = t_{\text{ж}_1} - t_{\text{ж}_2}$ , или поверхности теплообмена  $F$ . Коэффициент теплопередачи для плоской стенки определяется выражением  $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ . Выясним, на какое из сла-

гаемых нужно влиять, чтобы увеличить  $k$ .

*Рассмотрим конкретный пример.* Стальная стенка ( $\lambda = 45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ) толщиной 5 мм омывается с одной стороны водой  $\alpha_1 = 1000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ , с другой стороны воздухом:  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ . Определим коэффициент теплопередачи:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{45} + \frac{1}{10}} \approx 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}, \text{ т. е. } k \approx \alpha_{\min}.$$

Следовательно, для того чтобы увеличить значение коэффициента теплопередачи, необходимо увеличивать значение наименьшего коэффициента теплоотдачи.



Если процесс теплопередачи интенсифицируется за счет увеличения поверхности, т. е. ее оребрения, то возникает вопрос: какую поверхность (внутреннюю или наружную) необходимо делать ребристой? Согласно формуле (1.38), термическое сопротивление теплопередачи определяется не только величиной  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , но и размерами самих поверхностей. Отсюда следует, что если  $\alpha$  мало, то термическое сопротивление теплоотдачи  $\left(\frac{1}{\alpha d}\right)$  можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности (диаметра). Значит, оребрять поверхность необходимо со стороны наименьшего коэффициента теплоотдачи.

В инженерной практике в целях интенсификации процесса теплопередачи чаще всего увеличивают поверхность теплообмена за счет ее оребрения.

#### 1.4.1. Теплопередача через ребристую стенку (приближенный расчет)

**Постановка задачи.** Пусть имеется стенка, с одной стороны которой находится жидкость с температурой  $t_{ж_1} = \text{const}$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$ , с другой стороны стенка оребрена и омывается жидкостью, температура которой  $t_{ж_2} = \text{const}$  ( $t_{ж_1} > t_{ж_2}$ ), а коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$ . Толщина стенки  $\delta$ , а коэффициент теплопроводности ее материала  $\lambda$  (рис. 1.14).

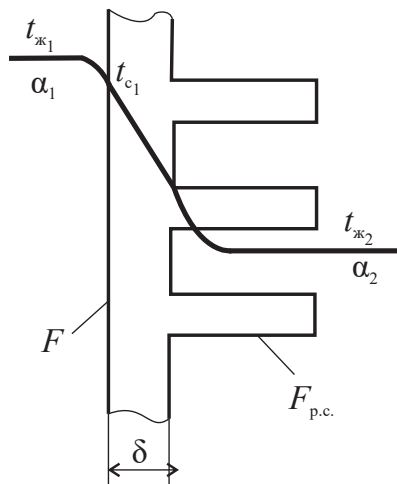


Рис. 1.14. Схематическое изображение плоской стенки с поперечными ребрами

Будем считать, что температура по длине ребра не изменяется (в этом и заключается приближенность расчета). Необходимо найти тепловой поток, передаваемый через ребристую стенку.

Известно, что теплопередача является сложным процессом. Сначала теплота от жидкости с температурой  $t_{ж_1}$  будет в процессе теплоотдачи передана стенке, затем этот тепловой поток передается через стенку теплопроводностью, далее в процессе теплоотдачи передается жидкости с температурой  $t_{ж_2}$ . Запишем эти уравнения, выразим из них разности температур и просуммируем, чтобы неизвестные температуры  $t_{c_1}$  и  $t_{c_2}$  сократились:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 (t_{ж_1} - t_{c_1}) F \rightarrow t_{ж_1} - t_{c_1} = Q \frac{1}{\alpha_1 F}, \\ Q &= \frac{\lambda}{\delta} (t_{c_1} - t_{c_2}) F \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = Q \frac{\delta}{\lambda F}, \\ Q &= \alpha_2 (t_{c_2} - t_{ж_2}) F_{pc} \rightarrow t_{c_2} - t_{ж_2} = Q \frac{1}{\alpha_2 F_{pc}}. \end{aligned} \right\} +$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t_{ж_1} - t_{ж_2} &= Q \left( \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{\delta}{\lambda F} + \frac{1}{\alpha_2 F_{pc}} \right), \\ Q &= \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2})}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{\delta}{\lambda F} + \frac{1}{\alpha_2 F_{pc}}}. \end{aligned}$$

Умножив числитель и знаменатель на  $F$  и обозначив  $\frac{F_{pc}}{F} = n$ , где  $n$  — коэффициент оребрения, получим формулу для расчета теплопередачи через ребристую стенку:

$$Q = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2}) F}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 n}}. \quad (1.44)$$

Эта формула получена без учета изменения температуры по длине ребра. Для точного расчета теплопередачи через ребристую стенку необходимо знать закономерность изменения температуры вдоль ребра.

### 1.4.2. Теплопроводность в ребре (стержне) постоянного поперечного сечения

**Постановка задачи.** Рассмотрим ребро (рис. 1.15) постоянного поперечного сечения  $f = \text{const}$ , периметр сечения  $u = \text{const}$ . Длина ребра  $l$ . Коэффициент теплопроводности материала ребра  $\lambda = \text{const}$ .

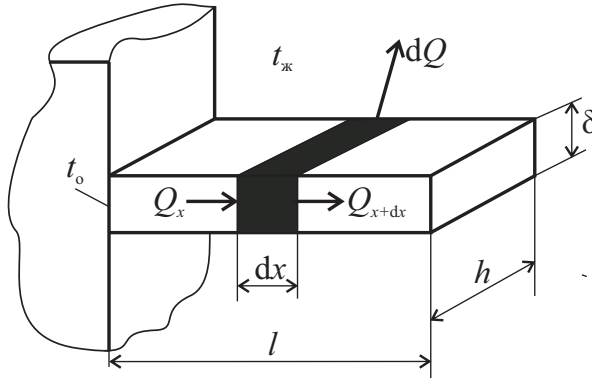


Рис. 1.15. Изометрическое изображение ребра прямоугольного поперечного сечения

У основания ребра поддерживается температура  $t_o$ . Ребро находится в среде с температурой  $t_j$ , известен коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . Коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ) материала ребра велик. Ребро тонкое, т.е. температурное поле по сечению ребра отсутствует (температура в центре ребра  $t_{ц}$  и температура на его поверхности  $t_c$  практически равны). Записывая равенство теплового потока, передаваемого в процессе теплопроводности по сечению ребра и отдаваемого в процессе теплоотдачи с поверхности ребра  $\frac{\lambda}{\delta}(t_{ц} - t_c) = \alpha(t_c - t_j)$ , получаем  $\frac{t_{ц} - t_c}{t_c - t_j} = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \rightarrow 0$ . Если подставить размерность величин, стоящих в правой части равенства, то размерности сократятся. Безразмерный комплекс величин  $\frac{\alpha \delta}{\lambda} = Bi$  называется безразмерным числом Био. Ребро считается тонким, если  $Bi \leq 0,1$ .

Необходимо найти закономерность изменения температуры по длине ребра и тепловой поток, передаваемый с поверхности ребра в окружающую среду.

Приступая к решению задачи введем понятие *избыточной температуры* (этим понятием будем пользоваться и при решении других задач). Избыточная температура — это температура, отсчитываемая не от нуля градусов, а от любого другого уровня, например от температуры жидкости или стенки тела. В данной задаче температуру будем отсчитывать от уровня температуры жидкости, контактирующей с поверхностью ребра:  $\vartheta = t - t_{\text{ж}}$ ,  $\vartheta_0 = t_0 - t_{\text{ж}}$ .

Для решения задачи выделим на расстоянии  $x$  от основания ребра элемент длиной  $dx$  и составим для него уравнение теплового баланса

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ. \quad (1.45)$$

Здесь  $Q_x$  и  $Q_{x+dx}$  — тепловые потоки, передающиеся теплопроводностью соответственно до выделенного элемента ребра и после него. Согласно закону Био — Фурье (1.4) их можно представить в виде  $Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f$  и  $Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left( \vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) f$ ;  $dQ$  — теплота, отводимая с поверхности выделенного элемента ребра в процессе теплоотдачи:  $dQ = \alpha (t - t_{\text{ж}}) u dx$ .

Подставим в (1.45) значения  $Q_x$ ,  $Q_{x+dx}$ ,  $dQ$ .

$$-\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f - \left[ -\lambda \frac{d}{dx} \left( \vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) f \right] = \alpha \vartheta u dx.$$

Раскрывая скобки и сокращая на  $dx$  левую и правую части, получаем

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha u}{\lambda f} \vartheta, \text{ или } \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta, \quad (1.46)$$

где  $\sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} = m$ . Общее решение уравнения (1.46) имеет вид

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (1.47)$$

Значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из начальных условий: при  $x = 0$   $\vartheta = \vartheta_0$ ; при  $x = l$   $\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=l} = 0$ , т. е. теплотой, передаваемой в окружающую среду с торца ребра, пренебрегаем, так как ребро тонкое. Подставляя граничные условия в общее решение (1.47), находим  $C_1$ ,  $C_2$  и получаем частное решение в виде

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{e^{-m(l-x)} + e^{m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}}. \quad (1.48)$$

Из математики известно, что  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$ . Умножим числитель и знаменатель (1.48) на  $1/2$ , тогда закономерность изменения температуры по длине ребра будет иметь вид

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\text{ch}[m(l-x)]}{\text{ch}(ml)}. \quad (1.49)$$

Согласно формуле (1.49) температура по длине ребра постоянного поперечного сечения изменяется по гиперболическому (экспоненциальному) закону.

Тепловой поток, передаваемый с поверхности ребра в окружающую среду, равен тепловому потоку, прошедшему теплопроводностью через основание ребра, рассчитывается по формуле

$$Q_p = -\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} \cdot f = -\lambda \vartheta_0 \frac{\text{sh}[m(l-0)]}{\text{ch}(ml)} (-m) f = \vartheta_0 \lambda f m \text{th}(ml).$$

Подставляя значение  $m$ , получаем

$$Q_p = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \text{th}(ml). \quad (1.50)$$

Значения гиперболических функций ( $\text{sh}(x)$ ,  $\text{ch}(x)$ ,  $\text{th}(x)$ ) приведены в П. 2.

### 1.4.3. Теплопередача через ребристую стенку (уточненный расчет)

Введем понятие коэффициента эффективности работы ребра:  $\Phi = \frac{Q_p}{Q_{\lambda \rightarrow \infty}}$ , где  $Q_p$  — тепловой поток, передаваемый с поверхности ребра в окружающую среду (рассчитывается по формуле 1.50);  $Q_{\lambda \rightarrow \infty}$  — тепловой поток, передаваемый этим ребром, когда температура вдоль него не изменяется (остается равной температуре у основания ребра), что теоретически возможно при  $\lambda = \infty$ , поэтому  $Q_{\lambda \rightarrow \infty} = \vartheta_0 \alpha u l$ . Тогда

$$\Phi = \frac{\vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \text{th}(ml)}{\vartheta_0 \alpha u l} = \sqrt{\frac{\lambda f}{\alpha u}} \frac{\text{th}(ml)}{l} = \frac{\text{th}(ml)}{ml}. \quad (1.51)$$

С введением коэффициента  $\Phi$  выражение для теплового потока с поверхности ребра запишется следующим образом:  $Q_p = \alpha(t_0 - t_{ж})F_p\Phi$ .

Температурные поля на поверхности ребер и в межреберном пространстве отличаются. В связи с этим расчет процесса теплоотдачи через ребристую стенку необходимо вести с использованием приведенного коэффициента теплоотдачи.

Рассмотрим плоскую стенку с прямыми ребрами (рис. 1.16).

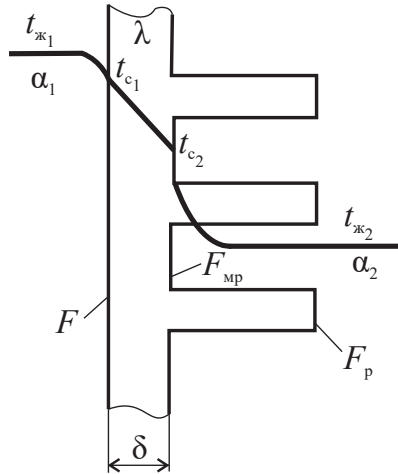


Рис. 1.16. К задаче по теплопередаче через плоскую оребренную стенку

Сначала теплота от жидкости с температурой  $t_{ж1}$  будет в процессе теплоотдачи передана стенке:  $Q = \alpha_1(t_{ж1} - t_{c1})F_1$ . Затем этот тепловой поток будет передан через стенку теплопроводностью:  $Q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2})F_1$ , дальше в процессе теплоотдачи отведен к жидкости с температурой  $t_{ж2}$ :

$$Q = Q_{mp} + Q_p = \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2})F_{mp} + \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2})F_p\Phi = \alpha_{пр}(t_{c2} - t_{ж2})F_{pc},$$

где  $Q_{mp}$ ,  $Q_p$  — тепловые потоки с межреберной поверхности и поверхности ребер;  $F_{pc} = F_{mp} + F_p$  — поверхность ребристой стенки,  $\alpha_{пр}$  — при-

веденный коэффициент теплоотдачи,  $\alpha_{пр} = \alpha_2 \left( \frac{F_{mp}}{F_{pc}} + \frac{F_p}{F_{pc}}\Phi \right)$ .

Запишем формулы тепловых потоков, выразим из них разности температур и просуммируем, чтобы неизвестные температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$  сократились:

$$Q = \alpha_1 (t_{ж_1} - t_{c_1}) F_1 \rightarrow t_{ж_1} - t_{c_1} = \frac{Q}{\alpha_1 F_1},$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c_1} - t_{c_2}) F_1 \rightarrow t_{c_1} - t_{c_2} = \frac{Q \delta}{\lambda F_1}, +$$

$$Q = \alpha_{пр} (t_{c_2} - t_{ж_2}) F_{пр} \rightarrow t_{c_2} - t_{ж_2} = \frac{Q}{\alpha_{пр} F_{пр}}.$$

Получаем

$$t_{ж_1} - t_{ж_2} = Q \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_{пр} F_{пр}} \right) = Q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{пр} \frac{F_{пр}}{F_1}} \right) = Q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{пр} \cdot n} \right) \frac{1}{F_1}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{(t_{ж_1} - t_{ж_2}) F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{пр} \cdot n}}. \quad (1.52)$$

Если известна температура  $t_{c_2}$ , то рассчитать теплоотдачу с ребристой поверхности можно, не прибегая к вычислению приведенного коэффициента теплоотдачи. При известной температуре  $t_{c_2}$  тепловой поток, передаваемый с ребристой поверхности, можно определить по формуле

$$Q = Q_p \cdot Z + Q_{мр},$$

где  $Q_p$  — тепловой поток с поверхности одного ребра:  $Q_p = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(ml) \Phi$ ;  $Z$  — количество ребер;  $Q_{мр}$  — тепловой поток с межреберной поверхности:  $Q_{мр} = \alpha_2 (t_{c_2} - t_{ж_2}) F_{мр}$ . При расчете считаем, что коэффициент теплоотдачи с поверхности ребер и межреберного пространства одинаковый.

### Пример решения задачи по теме «Интенсификация процесса теплопередачи»

**Пример.** Нагревательный прибор выполнен в виде вертикальной трубы с продольными стальными ребрами прямоугольного сечения

(рис. 1.17). Высота трубы  $h = 1200$  мм, наружный диаметр трубы  $d = 60$  мм, длина ребер  $l = 50$  мм, а их толщина  $\delta = 3$  мм. Общее число ребер  $Z = 20$ . Температура у основания ребра  $t_c = 80^\circ\text{C}$ . Температура окружающего воздуха  $t_{\text{ж}} = 18^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи от ребер и внешней поверхности трубы к окружающему воздуху  $\alpha = 9,3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$ , коэффициент теплопроводности стали  $\lambda = 55,7 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$ . Коэффициент эффективности работы ребра  $\Phi = 0,9$ . Вычислить тепловой поток, передаваемый ребристой стенкой в окружающую среду, и температуру на конце ребра.

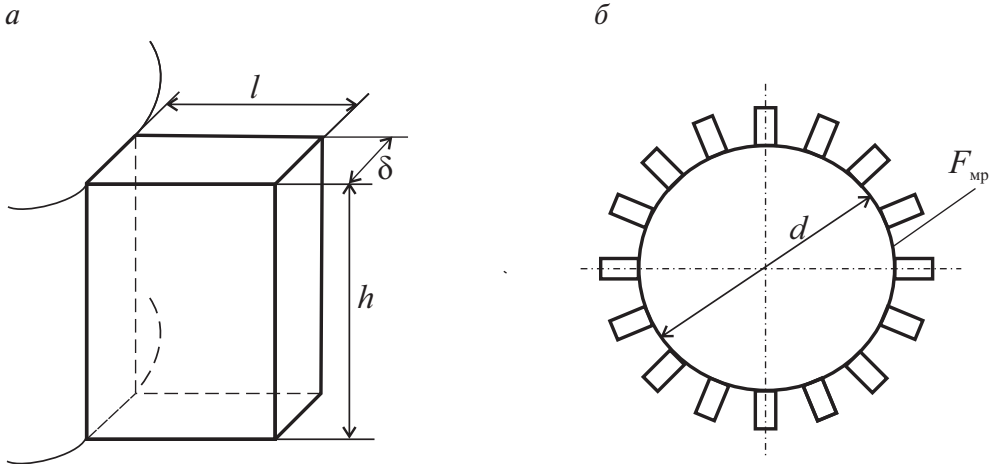


Рис. 1.17. Изображение ребра в изометрии (а) и вид сверху на нагревательный прибор (б)

**Решение.** В данной задаче имеет место процесс теплоотдачи с поверхности, которая оребрена продольными ребрами постоянного поперечного сечения. Теплота передается в окружающую среду как с поверхности ребер, так и с неоребренной части поверхности нагревательного элемента. Так как температура у основания ребра известна, то для решения данной задачи воспользуемся формулой  $Q = Q_p \cdot Z + Q_{\text{мп}}$ . Тепловой поток с поверхности одного ребра найдется по формуле  $Q_p = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(ml) \Phi$ , а тепловой поток с межреберной поверхности определится по формуле  $Q_{\text{мп}} = \alpha_2 (t_{c_2} - t_{\text{ж}_2}) F_{\text{мп}}$ . Рассчитаем площадь поверхности трубы, не занятую ребрами:

$$F_{\text{мп}} = (\pi \cdot d_2 - \delta \cdot Z) h = (3,14 \cdot 0,06 - 0,003 \cdot 20) 1,2 = 0,128 \text{ м}^2.$$



Определим тепловой поток с межреберной поверхности:

$$Q_{\text{мр}} = \alpha_2 (t_{\text{с}_2} - t_{\text{ж}_2}) F_{\text{мр}} = 9,3(80 - 18)0,128 = 73,8 \text{ Вт.}$$

Рассчитаем тепловой поток с поверхности одного ребра:

$$Q_p = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(ml) \Phi,$$

где периметр сечения ребра:  $u = 2 \cdot \delta + 2 \cdot h = 2 \cdot 0,003 + 2 \cdot 1,2 = 2,406 \text{ м}$ , а площадь поперечного сечения ребра  $f = \delta \cdot h = 0,003 \cdot 1,2 = 0,0036 \text{ м}^2$ .

$$\text{Значение } m = \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} = \sqrt{\frac{9,3 \cdot 2,406}{55,7 \cdot 0,0036}} = 10,56 \frac{1}{\text{м}}.$$

Рассчитаем аргумент гиперболического тангенса и его величину (см. П. 2):

$$\operatorname{th}(ml) = \operatorname{th}(10,56 \cdot 0,05) = \operatorname{th}(0,528) = 0,47.$$

Величина теплового потока с поверхности ребра

$$Q_p = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(ml) \Phi = (80 - 18) \sqrt{9,3 \cdot 2,406 \cdot 55,7 \cdot 0,0036} \cdot 0,47 \cdot 0,9 = 55,6 \text{ Вт.}$$

Тепловой поток с поверхности ребристой стенки:

$$Q = Q_p \cdot Z + Q_{\text{мр}} = 55,6 \cdot 20 + 73,8 = 1185,8 \text{ Вт.}$$

Температуру на конце ребра определим, воспользовавшись формулой (1.49):

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml)}.$$

В этой формуле  $\vartheta = t - t_{\text{ж}}$ , где  $t$  — искомая температура, а  $\vartheta_0 = t_{\text{с}} - t_{\text{ж}} = 80 - 18 = 62^\circ \text{C}$ .

Так как находим температуру на конце ребра, то  $x = l$ .

Тогда

$$t - 18 = 62 \frac{\operatorname{ch}[m(l-l)]}{\operatorname{ch}(ml)} = 62 \frac{1}{\operatorname{ch}(ml)} = \frac{62}{\operatorname{ch}(0,528)} = \frac{62}{1,146} = 54,1.$$

Температура на конце ребра составит  $t = 54,1 + 18 = 72,1^\circ \text{C}$ .

## 1.5. Теплопроводность при нестационарном режиме

---

Нестационарный теплообмен встречается во многих практических ситуациях. Например, чтобы получить требуемые физические свойства, металлы нагревают и охлаждают. При сварке деталей их температура изменяется во времени и по координатам.

Если при решении задач по стационарной теплопроводности необходимо было найти распределение температуры только по координатам тела, то в задачах по нестационарной теплопроводности необходимо знать распределение температуры не только по координатам, но и во времени. В общем случае нестационарные задачи решать труднее, чем стационарные.

В зависимости от характера изменения температуры во времени различают переходные процессы, когда температура в каждой точке тела изменяется от одного установившегося значения до другого (охлаждение или нагрев тела), и периодические процессы, когда температура тела колеблется около некоторого среднего значения.

Рассмотрим наиболее распространенную задачу нестационарной теплопроводности — одноразовое охлаждение (нагревание) тела.

Цель решения задач по нестационарной теплопроводности состоит в определении температурного поля в теле в любой момент времени и расчете количества полученной или отданной телом теплоты за любой промежуток времени.

### 1.5.1. Охлаждение (нагревание) бесконечной пластины

**Постановка задачи.** Пусть имеется пластина (рис. 1.18), размер которой вдоль оси  $x$  равен  $2\delta$ . Размеры пластины в направлении осей  $y$  и  $z$  неограниченны. Температура пластины изменяется только в направлении оси  $x$ . Пластина помещается в среду, температура которой  $t_{\text{ж}} = \text{const}$ . В начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) температура в пластине распределена равномерно и равна  $t_0$ , ( $t_0 > t_{\text{ж}}$ ), т. е. рассматриваем процесс охлаждения пластины. Все рассуждения и полученный результат будут верны и для процесса нагревания.

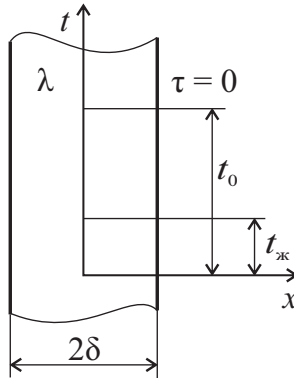


Рис. 1.18. Распределение температуры по толщине пластины в начальный момент времени

Интенсивность теплообмена с обеих поверхностей пластины одинакова, коэффициент теплоотдачи  $\alpha = \text{const}$ . В этом случае температурное поле будет симметричным относительно середины пластины. Теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала пластины не зависят от температуры. Необходимо найти закон распределения температуры по толщине пластины и количество теплоты, отводимой с поверхности пластины, за любой промежуток времени.

Избыточная температура в любой точке тела в произвольный момент времени  $\vartheta = t - t_{\text{ж}}$ . При  $\tau = 0$   $\vartheta_0 = t_0 - t_{\text{ж}}$ .

Для нахождения закона распределения температуры по толщине пластины в любой момент времени запишем дифференциальное уравнение теплопроводности (1.14). Согласно условию задачи ( $\partial^2 t / \partial y^2 = \partial^2 t / \partial z^2 = 0$ ) дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$\frac{dt}{d\tau} = a \frac{d^2 t}{dx^2} \quad \text{или} \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = a \frac{d^2 \vartheta}{dx^2}. \quad (1.61)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом разделения переменных [3]. Представим искомую функцию  $\vartheta = f(x, \tau)$  в виде произведения  $T(\tau)$  и  $L(x)$ :

$$\vartheta = T(\tau) L(x). \quad (1.62)$$

Первый множитель (1.62) зависит только от времени, второй — только от координаты. Дифференцируя выражение (1.62), найдем

$\frac{d\vartheta}{d\tau} = L \frac{dT}{d\tau}$ ;  $\frac{d\vartheta}{dx} = T \frac{dL}{dx}$ ;  $\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = T \frac{d^2L}{dx^2}$ . Подставим эти значения в (1.61), получим

$$L \frac{dT}{d\tau} = aT \frac{d^2L}{dx^2} \text{ или } \frac{1}{a} \frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{L} \frac{d^2L}{dx^2}.$$

Левая часть этого уравнения есть функция от времени ( $\tau$ ), правая — от координаты ( $x$ ). Значит, обе части должны быть равны некоторой постоянной величине, которую обозначим  $k^2$ . Исходя из физических соображений (процесс стремится к тепловому равновесию), постоянная  $k^2$  должна иметь знак *минус*:

$$\frac{1}{a} \frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{L} \frac{d^2L}{dx^2} = -k^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} &= -k^2 \text{ или } \frac{dT}{d\tau} + ak^2T = 0, \\ \frac{1}{L} \frac{d^2L}{dx^2} &= -k^2 \text{ или } \frac{d^2L}{dx^2} + k^2L = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений, общие решения которых известны:

$$T = C_1 e^{-ak^2\tau}, \quad L = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx). \quad (1.64)$$

Подставляя эти выражения в (1.62), имеем

$$\vartheta = C_1 e^{-ak^2\tau} [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)]. \quad (1.65)$$

Для нахождения частного решения уравнения (1.65) необходимо определить постоянные интегрирования ( $C_1, C_2, C_3$ ), а также  $k$ . Для этого запишем начальные и граничные условия: при  $\tau = 0$   $\vartheta = \vartheta_0$ ;

$$\text{при } x = 0 \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0; \text{ при } x = \pm \delta \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\pm\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\pm\delta}.$$

Константу интегрирования  $C_2$  находим из условия

$$\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = C_1 e^{-ak^2\tau} [C_2 k \cos(k0) - C_3 k \sin(k0)] = 0.$$

Первый сомножитель нулю не равняется, значит,  $[C_2 k \cos(k0) - C_3 k \sin(k0)] = 0$ , откуда следует, что  $C_2 = 0$ .

Формула (1.65) принимает вид  $\vartheta = C_1 e^{-ak^2\tau} C_3 \cos(kx)$ . Обозначим  $C_1 \cdot C_3 = A$ , тогда  $\vartheta = A \cdot e^{-ak^2\tau} \cos(kx)$ . Величину  $k$  найдем из условия  $\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\pm\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\pm\delta}$ , где  $\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\pm\delta} = A e^{-ak^2\tau} (-k) \sin(k\delta)$ , а  $\vartheta_{x=\pm\delta} = A \cdot e^{-ak^2\tau} \cos(k\delta)$ .

$$A e^{-ak^2\tau} (-k) \sin(k\delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} A e^{-ak^2\tau} \cos(k\delta).$$

После преобразования имеем  $\frac{\lambda k \delta}{\alpha} \sin(k\delta) = \cos(k\delta)$ . Обозначим  $k\delta = \mu$ , а  $\frac{\lambda}{\alpha \delta} = \frac{1}{Bi}$ , тогда  $\frac{\mu}{Bi} = \text{ctg}(\mu)$ . Теперь будем искать не  $k$ , а  $\mu$ . Для этого решим последнее уравнение графически. Обозначим  $\text{ctg} \mu = y_1$ ,  $\frac{\mu}{Bi} = y_2$  и построим эти функции. Функция  $y_1$  является катангенсоидой. Значения  $\mu$  получаются на пересечении  $y_1$  с прямой  $y_2$  (рис. 1.19).

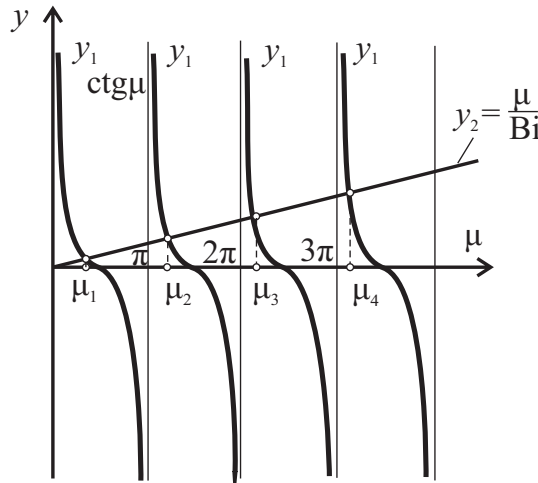


Рис. 1.19. Графическое решение уравнения  $\frac{\mu}{Bi} = \text{ctg}(\mu)$

Угол наклона прямой  $y_2$  определяется числом  $Bi$ . Так как значений  $Bi$  может быть бесконечное множество, то и значений  $\mu$  будет бесконечное множество. Причем каждая последующая величина  $\mu$  больше предыдущей, т. е.  $\mu_1 < \mu_2 < \dots$

При  $Bi \rightarrow \infty$  ( $y_2 \rightarrow 0$ ) прямая  $\frac{\mu}{Bi}$  совпадает с осью абсцисс и значения  $\mu$  становятся равны:  $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$ ;  $\mu_2 = \frac{3\pi}{2}$ ; ...  $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ ... Каждому значению  $\mu$  соответствует свое частное решения уравнения

$$\vartheta_1 = A \cdot e^{-ak^2 \tau \frac{\delta^2}{\delta^2}} \cos\left(kx \frac{\delta}{\delta}\right) = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}};$$

$$\vartheta_2 = A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_2^2 \frac{a\tau}{\delta^2}};$$

$$\vartheta_3 = A_3 \cos\left(\mu_3 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_3^2 \frac{a\tau}{\delta^2}};$$

.....

$$\vartheta_n = A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}.$$

Общее решение уравнения можно представить суммой бесконечного ряда

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (1.65a)$$

Постоянную  $A_n$  найдем из условия, что при  $\tau = 0$   $\vartheta = \vartheta_0$ .

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) + A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) + A_3 \cos\left(\mu_3 \frac{x}{\delta}\right) + \dots$$

Умножим левую и правую части равенства на  $\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx$  и проинтегрируем в пределах от *минус*  $\delta$  до *плюс*  $\delta$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \vartheta_0 \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx &= \int_{-\delta}^{\delta} A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx + \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx + \int_{-\delta}^{\delta} A_3 \cos\left(\mu_3 \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx + \dots \end{aligned}$$

Согласно ортогональности тригонометрических функций

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_i \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \begin{cases} = 0, & \text{если } n \neq i \\ \neq 0, & \text{если } n = i \end{cases}.$$

Тогда  $\int_{-\delta}^{\delta} \vartheta_0 \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \int_{-\delta}^{\delta} A_n \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx$ , так как все остальные члены ряда равны нулю. Отсюда

$$A_n = \frac{\int_{-\delta}^{\delta} \vartheta_0 \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx}{\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx} = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Учитывая это, запишем частное решение уравнения (1.65а):

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (1.66)$$

Это уравнение описывает температурное поле в бесконечной пластине.

В (1.66)  $\mu = k\delta = f\left(\frac{\alpha\delta}{\lambda}\right)$ . Запишем (1.66) в безразмерном виде.

Обозначим:  $\frac{x}{\delta} = X$ ,  $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \theta$  — соответственно безразмерные координата и температура;  $\frac{a\tau}{\delta^2} = Fo$ ,  $\frac{\alpha\delta}{\lambda} = Bi$  — безразмерные числа Фурье и Био.

В безразмерном виде уравнение (1.66) будет иметь вид

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (1.67)$$

Анализ (1.67) показывает, что чем больше номер ряда, тем меньшую долю вносит это слагаемое в общую сумму ряда, т. е. ряд быстро сходится, особенно при  $Fo \geq 0,3$ . Поэтому распределение температуры можно с достаточной степенью точности описать только первым членом ряда:

$$\theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (1.68)$$

Пользоваться полученным уравнением на практике затруднительно, поэтому на основании выражения (1.68) построены сложные графики (номограммы)  $\theta = f(X, Fo, Bi)$ , пользование которыми сводит расчеты к довольно простым операциям. Для практики часто бывает достаточно контролировать температуру тела в его центре или на по-

верхности и по изменению величины температуры в соответствующей точке судить о процессе нагревания (охлаждения) всего тела.

Согласно формуле (1.68) безразмерная температура в центре пластины ( $x = 0, X = 0$ ) определяется по формуле

$$\theta_{X=0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-\mu_1^2 Fo},$$

а на поверхности пластины ( $x = \delta, X = 1$ ) —

$$\theta_{X=1} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1) e^{-\mu_1^2 Fo}.$$

Первые сомножители в этих выражениях зависят только от  $Bi$ . Обозначим их следующим образом:

$$\frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} = N(Bi), \quad \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos \mu_1 = M(Bi).$$

$$\text{Тогда } \theta_{X=0} = N(Bi) e^{-\mu_1^2 Fo}, \quad \theta_{X=1} = M(Bi) e^{-\mu_1^2 Fo}.$$

Прологарифмируем последние два выражения

$$\ln \theta_{X=0} = \ln N(Bi) - \mu_1^2 Fo,$$

$$\ln \theta_{X=1} = \ln M(Bi) - \mu_1^2 Fo.$$

Графически эти зависимости представлены в П. 3 (см. рис. П. 3.1, П. 3.2). Пользуясь этими номограммами, можно легко найти температуру в центре и на поверхности бесконечной пластины (такие же номограммы имеются и для бесконечного цилиндра (см. рис. П. 3.3, П. 3.4) в любой момент времени. Для этого необходимо рассчитать безразмерные числа  $Bi$  и  $Fo$  и отложить их значения на соответствующей номограмме. Точка пересечения даст величину безразмерной температуры  $\theta = \frac{t - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}$ . Зная  $\theta$ , можно вычислить размерную температуру

$$t = \theta(t_0 - t_{\text{ж}}) + t_{\text{ж}}.$$

**Физический смысл безразмерных чисел  $Bi$  и  $Fo$ .**  $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha} = \frac{R_{\lambda}}{R_{\alpha}}$  характеризует соотношение между термическими сопротивлениями теплопроводности и теплоотдачи;  $Fo = \frac{a \tau}{\delta^2}$  является безразмерным временем.



**Частные случаи охлаждения (нагрева) бесконечной пластины.** При  $Bi \rightarrow \infty$  (практически при  $Bi \geq 100$ ) температура стенки перестает зависеть от условий теплообмена на границах тела. Объясняется это следующим образом:  $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha} \rightarrow \infty$ . Поскольку размер пластины не может быть бесконечным, а  $\lambda$  для твердых тел не может быть равен нулю, то  $\alpha \rightarrow \infty$ , а  $(1/\alpha) \rightarrow 0$ , т.е. термическое сопротивление теплоотдачи становится несоизмеримо малым по сравнению с термическим сопротивлением теплопроводности, и поэтому температурное поле определяется условиями распространения теплоты внутри тела (рис. 1.20, а).

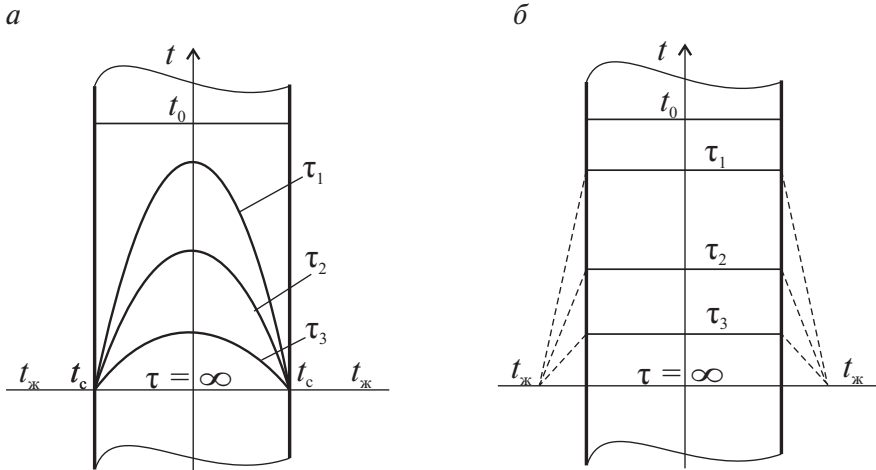


Рис. 1.20. Распределение температуры по сечению пластины при  $Bi \rightarrow \infty$  (а) и при  $Bi \rightarrow 0$  (б)

При  $Bi \rightarrow 0$  (практически при  $Bi \leq 0,1$ ), что возможно, когда  $\alpha \rightarrow 0$  (размер пластины нулевым быть не может, а  $\lambda$  для твердых тел не может быть бесконечным), охлаждение тела определяется внешними условиями, а температура в каждый момент времени во всех его точках будет одинакова (рис. 1.20, б). При  $0,1 < Bi < 100$  охлаждение тела определяется как свойствами самого тела, так и внешними условиями.

**Определение теплоты, отданной (полученной) пластиной в процессе охлаждения (нагрева).** Полное количество отданной (или полученной) пластиной теплоты при  $\tau \rightarrow \infty$ , когда температуры тела и среды выравняются, определится по формуле  $Q_{\tau \text{ пол}} = c_p M (t_0 - t_{\text{ж}})$ .

Масса тела  $M = \rho V$ , а объем пластины  $V = 2\delta f$ , где  $f$  — боковая поверхность. Количество теплоты  $Q_\tau$ , отданной за время  $\tau$ , найдется по формуле  $Q_\tau = c_p \rho 2\delta f (t_0 - \bar{t}_\tau)$ . Преобразуем разность температур следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_\tau &= c_p \rho 2\delta f (t_0 - \bar{t}_\tau) = c_p \rho 2\delta f \left[ (t_0 - t_{\text{ж}}) - (\bar{t}_\tau - t_{\text{ж}}) \right] = \\ &= c_p \rho 2\delta f (t_0 - t_{\text{ж}}) \left[ 1 - \frac{\bar{t}_\tau - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \right] = Q_{\tau \text{пол}} \left[ 1 - \frac{\bar{t}_\tau - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{t}_\tau$  — средняя по толщине пластины температура по истечении периода времени  $\tau$ . Величина  $\frac{\bar{t}_\tau - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \theta$  — безразмерная температура, являющаяся функцией  $Bi$  и  $Fo$ . Тогда

$$Q_\tau = Q_{\tau \text{пол}} (1 - \theta).$$

Поскольку  $\theta = f(Bi, Fo)$ , то и

$$\frac{Q_\tau}{Q_{\tau \text{пол}}} = f(Bi, Fo). \quad (1.69)$$

График этой функции для пластины приведен в П. 3, рис. П. 3.5. Аналогичный график этой функции для цилиндра приведен в П. 3 на рис. П. 3.6.

**Характерный геометрический размер, входящий в безразмерные числа Био и Фурье.** В качестве характерного геометрического размера в безразмерных числах Био и Фурье берется для пластины — половина ее толщины; для цилиндра и шара — их радиус. Это в том случае, если интенсивность теплоотдачи со всех сторон одинаковая (температурное поле симметрично относительно середины тела). Когда тело, например пластина, охлаждается (нагревается) только с одной стороны, то в качестве геометрического размера в безразмерные числа  $Bi$  и  $Fo$  подставляется полная толщина пластины, для цилиндра и шара — диаметр.

### 1.5.2. Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров правильной геометрической формы

Любое тело конечных размеров правильной геометрической формы можно получить путем пересечения бесконечных тел. Например, на рис. 1.21 изображен цилиндр конечных размеров, который получен путем пересечения бесконечного цилиндра диаметром  $2r$  и бесконечной пластины толщиной  $2\delta$ .

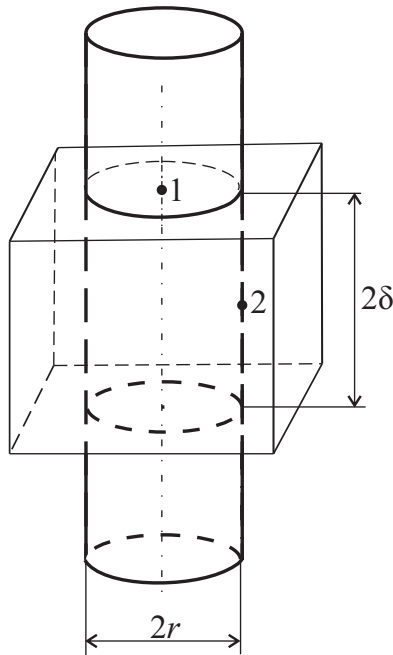


Рис. 1.21. Цилиндр конечных размеров, полученный путем пересечения бесконечного цилиндра и бесконечной пластины

Для нахождения распределения температуры в теле конечных размеров необходимо воспользоваться теоремой о перемножении решений. Теорема гласит: *безразмерная температура тела конечных размеров в данной точке в данный момент времени равна произведению безразмерных температур в той же точке и в тот же момент времени бесконечных тел, в результате пересечения которых образовалось данное тело конечных размеров.* Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [1]. Для задач эту теорему можно использовать следующим образом. Например, пусть необходимо найти температуру цилиндра конечных

размеров в точке 2, лежащей на поверхности бесконечного цилиндра и в центре бесконечной пластины (рис. 1.21), в результате пересечения которых данный цилиндр конечных размеров получен. Решение запишется в виде

$$\theta_2 = \theta_{\text{цил}}^{\text{пов}} \theta_{\text{пл}}^{\text{центр}}, \quad (1.70)$$

где  $\theta_{\text{цил}}^{\text{пов}}$  — безразмерная температура на поверхности бесконечного цилиндра, определяется как функция  $Bi$  и  $Fo$  для цилиндра  $\left( Bi = \frac{\alpha r}{\lambda}, Fo = \frac{a\tau}{r^2} \right)$ ;  $\theta_{\text{пл}}^{\text{центр}}$  — безразмерная температура в центре бесконечной пластины, являющаяся функцией также  $Bi$  и  $Fo$ , но для пластины  $\left( Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}, Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \right)$ . Безразмерные температуры находят по соответствующим графикам  $\theta_{\text{цил}}^{\text{пов}} = f(Bi, Fo)$  и  $\theta_{\text{пл}}^{\text{центр}} = f(Bi, Fo)$ , а затем, подставляя их значения в (1.70), определяют безразмерную температуру  $\theta_2$  и искомую температуру  $t_2$ .

$$\theta_2 = \frac{t_2 - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \rightarrow t_2 = \theta_2 (t_0 - t_{\text{ж}}) + t_{\text{ж}}.$$

### 1.5.3. Охлаждение (нагревание) тел любой формы при $Bi \rightarrow 0$ ( $Bi \leq 0,1$ )

Если при решении задач нестационарной теплопроводности число  $Bi$  мало ( $Bi \leq 0,1$ ), то пользоваться вышеупомянутыми графиками для определения температуры тела почти невозможно (очень мала точность). В этом случае можно воспользоваться несложным аналитическим решением, которое получим ниже.

**Постановка задачи.** Пусть имеется тело, поверхность которого  $F$ , а объем  $V$ . В момент времени  $\tau = 0$  избыточная температура тела  $\vartheta_0 = t_0 - t_{\text{ж}}$ . Тело охлаждается в среде с  $t_{\text{ж}} = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ . Требуется найти закон распределения температуры в зависимости от объема и формы тела.

При  $Bi \rightarrow 0$ , как показано на рис. 1.20, температура всех точек тела в данный момент времени одинакова. Количество теплоты  $dQ_{\tau} = -c_p M d\vartheta$ , отдаваемое телом при его охлаждении (поэтому знак *минус*) в окружающую среду, может быть определено и по уравнению теплоотдачи  $dQ_{\tau} = \alpha F \vartheta d\tau$ .

$$-c_p M d\vartheta = \alpha F \vartheta d\tau. \quad (1.71)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\alpha F}{c_p M} d\tau, \quad \ln \vartheta = -\frac{\alpha F}{c_p M} \tau + \ln C. \quad (1.72)$$

Найдем постоянную интегрирования ( $C$ ). Запишем начальные условия: при  $\tau = 0$   $\vartheta = \vartheta_0$ . Подставляя начальные условия в (1.72), получаем  $C = \vartheta_0$ . Тогда  $\ln \vartheta = -\frac{\alpha F}{c_p M} \tau + \ln \vartheta_0$  или  $\frac{\ln \vartheta}{\ln \vartheta_0} = -\frac{\alpha F}{c_p M} \tau$ . Выполнив логарифмирование данного выражения, получаем

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{\alpha F \tau}{c_p M}} \text{ или } \vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{\alpha F \tau}{c_p \rho V}}. \quad (1.73)$$

Уравнение (1.73) описывает закономерность изменения температуры в теле, поверхность которого  $F$ , а объем  $V$ . Запишем эту закономерность для тел правильной формы:

- для пластины  $\frac{F}{V} = \frac{2f}{2\delta f} = \frac{1}{\delta}$ .

Подставим это в показатель степени формулы (1.73) и учитывая, что  $\frac{\lambda}{c_p \rho} = a$ , получим  $\frac{\alpha F \tau}{c_p \rho V} = \frac{\alpha \tau \delta}{c_p \rho \delta \delta} = \frac{\tau}{\delta^2} \frac{\alpha \delta \lambda}{c_p \rho \lambda} = \frac{a \tau}{\delta^2} \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \text{FoBi}$ ,

тогда

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\text{BiFo}}; \quad (1.74)$$

- для цилиндра  $\frac{F}{V} = \frac{2\pi r l}{\pi r^2 l} = \frac{2}{r}$ ; делая преобразования, аналогичные показанным выше и подставляя в (1.73), получим

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-2\text{BiFo}}; \quad (1.75)$$

- для шара  $\frac{F}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$ , подставляя это в (1.73), получим

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-3\text{BiFo}}. \quad (1.76)$$

Из приведенных уравнений [(1.74)...(1.76)] следует, что при одинаковой величине определяющего геометрического размера и прочих равных условиях наибольшая скорость изменения температуры — у тела шарообразной формы.

#### 1.5.4. Регулярный тепловой режим

Обратимся к формуле (1.66). Первый сомножитель в этой формуле обозначим через  $A_n$ , а второй —  $B_n$ ;

$$\vartheta_0 \cdot \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} = A_n, \quad \cos \left( \mu_n \frac{x}{\delta} \right) = B_n,$$

$$e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} = e^{-m_n^2 \tau}, \quad \text{где } m_n = \frac{\mu_n^2 a}{\delta^2}.$$

Тогда формула (1.66) запишется в виде  $\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n B_n) e^{-m_n^2 \tau}$ .

Для тел других, нежели пластина, форм температурное поле будет описываться уравнением такого же вида, другие будут только  $A_n$  и  $B_n$ .

При охлаждении тел могут иметь место три стадии (режима), отличающиеся скоростью изменения температуры тела. Неупорядоченная стадия процесса охлаждения — это первая стадия, при которой скорость изменения температуры внутри тела зависит от начального вида распределения температуры. Третья стадия — стационарная, когда температура во всех точках тела остается постоянной во времени и равной температуре окружающей среды. Вторая стадия, или регулярный тепловой режим, наступает тогда, когда начальные условия процесса охлаждения играют второстепенную роль. Процесс полностью определяется только условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела, его геометрической формой и размерами. Температурное поле в этом случае описывается первым членом ряда

$$\vartheta = A_1 B_1 e^{-m_1^2 \tau}. \quad (1.77)$$

Логарифмируя выражения (1.77) и опуская индексы, получим

$$\ln \vartheta = -m\tau + \ln(AB). \quad (1.78)$$

Из (1.78) следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону.

Продифференцируем (1.78) по времени:  $\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -m + \text{const}$ . Величину  $m = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$  называют темпом охлаждения.

Темп охлаждения  $m$ , 1/с, характеризует относительную скорость изменения температуры в теле и зависит от физических свойств тела, его геометрической формы, размеров и условий охлаждения на границе тела и среды.

Теория регулярного режима дает простой и достаточно точный метод определения теплофизических коэффициентов вещества  $a$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$  и коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . В основе метода лежат две теоремы (теоремы Кондратьева).

**Первая теорема Кондратьева.** Теорема позволяет найти зависимость темпа охлаждения  $m$  от физических свойств тела, его геометрической формы, размеров и интенсивности теплообмена на поверхности.

Запишем тепловой баланс между количеством теплоты  $dQ_\tau = -c_p M \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} d\tau$ , отведенным от тела при охлаждении, и теплотой  $dQ_\tau = \alpha \bar{\vartheta}_F F d\tau$ , полученной средой, в которой тело охлаждается:

$$-c_p M \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} d\tau = \alpha \bar{\vartheta}_F F d\tau, \quad (1.79)$$

где знак *минус* в формуле свидетельствует, что теплота отводится с поверхности тела;  $\bar{\vartheta}_V$  и  $\bar{\vartheta}_F$  — средние по объему и поверхности тела избыточные температуры соответственно. Умножив левые и правые части (1.79) на  $\frac{1}{\bar{\vartheta}_V}$ , сократив на  $d\tau$ , и, учтя, что  $M = \rho \cdot V$ , получим

аналитическую запись первой теоремы Кондратьева:

$$-\frac{1}{\bar{\vartheta}_V} \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \frac{\alpha F}{c_p \rho V} \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V} \text{ или } m = \frac{\alpha F}{c_p \rho V} \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V}. \quad (1.80)$$

Темп охлаждения однородного и изотропного тела пропорционален коэффициенту теплоотдачи, площади поверхности тела и обратно пропорционален удельной теплоемкости, плотности и объему тела.

Отношение  $\bar{\vartheta}_F / \bar{\vartheta}_V$  называется коэффициентом неравномерности распределения температуры в теле и зависит от условий охлаждения на поверхности тела. При  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ ), согласно рис. 1.20,  $\bar{\vartheta}_F = \bar{\vartheta}_V$ , поэтому  $\frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V} = 1$ . При  $Bi \rightarrow \infty$  ( $Bi > 100$ ), согласно рис. 1.19,  $t_c = t_{\text{ж}}$ , следовательно,  $\bar{\vartheta}_F = t_c - t_{\text{ж}} = 0$  и  $\frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V} = 0$ .

**Вторая теорема Кондратьева.** При  $Bi \rightarrow \infty$  (или то же, что  $\alpha \rightarrow \infty$ ) темп охлаждения становится пропорционален коэффициенту теплопроводности  $a$ .

Темп охлаждения  $m = \frac{\mu^2 a}{l^2}$ . При  $Bi \rightarrow \infty$  для пластины (рис. 1.19)  $\mu \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $m_{\infty} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 a$ . Обозначим  $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} = K$ . Напомним, что для пла-

стины при равномерном нагреве (охлаждении) со всех сторон характерным линейным размером является половина толщины пластины ( $l = \delta$ ). Поэтому для пластины коэффициент формы  $K$  запишется в виде

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2}.$$

Подставим коэффициент формы в формулу темпа охлаждения  $m_{\infty} = \frac{1}{K} a$ , откуда получим

$$a = K m_{\infty}. \quad (1.81)$$

### Примеры решения задач по теме «Нестационарная теплопроводность»

*Схема решения задач по нестационарной теплопроводности:*

- необходимо уяснить — конечный или бесконечный размер тела;
- выяснить, одинаковая или нет интенсивность охлаждения (нагрева) тела со всех сторон (задача симметричная или не симметричная);



- вычислить безразмерное число Био:  
если  $Bi > 0,1$ , задача решается графически (по номограммам (П. 3);  
если  $Bi \leq 0,1$ , задача решается аналитически по формулам [(1.73)...(1.76)].

**Пример 1.** Стальной вал диаметром  $d = 400$  мм равномерно нагрет до температуры  $400^\circ\text{C}$ . Вал погружают в масляную ванну с температурой  $t_{\text{ж}} = 30^\circ\text{C}$ . Определить температуру на оси и на поверхности вала через  $\tau = 10$  мин после начала охлаждения. Коэффициент теплоотдачи от поверхности вала к среде  $\alpha = 582$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Определить также количество теплоты, которое будет отдано с одного метра длины вала за это время.

*Решение.* Поскольку длина вала в задаче не оговаривается, принимаем, что тело бесконечного размера (диаметр вала много меньше его длины). Полагаем, что вал, погруженный в масляную ванну, охлаждается со всех сторон равномерно, а это значит, что в качестве определяющего геометрического размера при расчете безразмерных чисел  $Bi$  и  $Fo$  необходимо брать половину толщины тела, т. е. в данном случае — радиус вала.

Из табл. П. 1.1 выпишем значения теплофизических величин для стали, из которой вал изготовлен:

$$\rho = 7900 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 454 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = 0,462 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}; \quad a = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Вычислим величину безразмерного числа Био ( $Bi = \frac{\alpha r}{\lambda}$ ).

$$Bi = \frac{\alpha r}{\lambda} = \frac{582 \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{45,4} = 2,6.$$

Делаем заключение, что величина  $Bi > 0,1$ , значит, задача решается графически (по номограммам). Вычисляем число Фурье:

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{r^2} = \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 60}{0,04} = 0,2.$$

Определяем температуру на оси вала. Безразмерную температуру  $\theta = f(Bi, Fo)$  находим (П. 3, рис. П. 3.4) как точку пересечения величин  $Bi = 2,6$  и  $Fo = 0,2$ ,  $\theta_{r=0} = 0,8$ . Определив безразмерную температуру на оси вала, рассчитываем размерную температуру

$$\theta_{r=0} = \frac{t_{r=0} - t_{\text{ж}}}{t_1 - t_{\text{ж}}} \rightarrow t_{r=0} = \theta_{r=0} (t_1 - t_{\text{ж}}) + t_{\text{ж}} = 0,8(400 - 30) + 30 = 326^\circ\text{C}.$$

Таким же образом определяем температуру на поверхности вала:  
 $\theta_{r=r_0} = f(\text{Bi}, \text{Fo})$ . Находим  $\theta_{r=r_0} = 0,33$  (П. 3, рис. П. 3.3).

$$\theta_{r=r_0} = \frac{t_{r=r_0} - t_{\text{ж}}}{t_1 - t_{\text{ж}}} \rightarrow t_{r=r_0} = \theta_{r=r_0} (t_1 - t_{\text{ж}}) + t_{\text{ж}} = 0,33(400 - 30) + 30 = 152^\circ\text{C}.$$

Для того чтобы вычислить теплоту, отданную валом за 10 минут его охлаждения, воспользуемся данными (П. 3, рис. П. 3.6) и найдем отношение количества теплоты, отданной валом за промежуток времени  $\tau$ , к количеству теплоты при его полном охлаждении как точку пересечения величин  $\text{Bi} = 2,6$  и  $\text{Fo} = 0,2$ .

$$Q_\tau / Q_{\text{пол}} = f(\text{Bi}, \text{Fo}); Q_\tau / Q_{\text{пол}} = 0,45.$$

Рассчитаем количество теплоты при полном охлаждении тела от  $400^\circ\text{C}$  до  $30^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned} Q_{\text{пол}} &= c_p M (t_1 - t_{\text{ж}}) = c_p \rho V (t_1 - t_{\text{ж}}) = c_p \rho \frac{\pi d^2}{4} l (t_1 - t_{\text{ж}}) = \\ &= 0,462 \cdot 10^3 \cdot 7900 \frac{3,14 \cdot 0,16^2}{4} 1 (400 - 30) = 169,7 \cdot 10^6 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Тогда количество теплоты, отданное телом за 10 мин будет равно

$$Q_\tau = 0,45 \cdot Q_{\text{пол}} = 0,45 \cdot 169,7 \cdot 10^6 = 76,34 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

**Пример 2.** Стальной цилиндр ( $\lambda = 25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) диаметром  $d = 200 \text{ мм}$  и длиной  $l = 2\delta = 400 \text{ мм}$ , нагретый до температуры  $t_0 = 800^\circ\text{C}$ , охлаждается в среде с температурой  $t_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ . Определить температуру цилиндра в точке 1 (см. рис. 1.22) через 60 мин после начала охлаждения. Коэффициент теплоотдачи от поверхности цилиндра к среде  $\alpha = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Коэффициент теплопроводности стали  $a = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

*Решение.* Длина цилиндра задана. Данный цилиндр конечных размеров, а это значит, что температура в точке 1 найдется, согласно (1.70) путем перемножения решений для тел бесконечных, в результате пересечения которых это тело конечных размеров получено. В данном случае — путем пересечения бесконечного цилиндра диаметром  $d = 2r_0$

и бесконечной пластины толщиной  $2\delta$  Охлаждение со всех сторон равномерное, т. е. в качестве определяющего геометрического размера в безразмерных числах Био и Фурье будут  $r_0$  для цилиндра и  $\delta$  для пластины. Точка 1 лежит в центре (на оси) бесконечного цилиндра и на поверхности бесконечной пластины, значит, безразмерная температура в искомой точке найдется по выражению  $\theta_1 = \theta_{\text{цил}}^{\text{ось}} \cdot \theta_{\text{пл}}^{\text{пов}}$ .

Найдем отдельно безразмерные температуры цилиндра на его оси ( $\theta_{\text{цил}}^{\text{ось}}$ ) и безразмерную температуру пластины на ее поверхности ( $\theta_{\text{пл}}^{\text{пов}}$ ). Для этого вычислим  $Bi$  и  $Fo$  для цилиндра и пластины. Для цилиндра:

$$Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda} = \frac{100 \cdot 0,1}{25} = 0,4; \quad Fo = \frac{a\tau}{r_0^2} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,01} = 2,2.$$

Для пластины:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda} = \frac{100 \cdot 0,2}{25} = 0,8; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,04} = 0,54.$$

Из П. 3, рис. П. 2.4 находим  $\theta_{\text{цил}}^{\text{ось}} = f(Bi, Fo)$  как точку пересечения  $Bi$  и  $Fo$ , рассчитанных для цилиндра:  $\theta_{\text{цил}}^{\text{ось}} = 0,25$ . Из П. 3, рис. П. 3.1 находим  $\theta_{\text{пл}}^{\text{пов}}$  как точку пересечения  $Bi$  и  $Fo$ , рассчитанных для пластины:  $\theta_{\text{пл}}^{\text{пов}} = 0,56$ . Тогда  $\theta_1 = \theta_{\text{цил}}^{\text{ось}} \cdot \theta_{\text{пл}}^{\text{пов}} = 0,25 \cdot 0,56 = 0,14$ , откуда найдется размерная температура в искомой точке:

$$\theta_1 = \frac{t_1 - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \rightarrow t_1 = \theta_1 (t_0 - t_{\text{ж}}) + t_{\text{ж}} = 0,14(800 - 20) + 20 = 125.$$

**Пример 3.** Определить время нагрева листа стали толщиной  $2\delta = 14$  мм, который имел температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , а затем был плашмя положен на пол печи, температура в которой  $t_{\text{ж}} = 400^\circ\text{C}$ . Нагрев считать законченным, когда температура листа достигнет  $t = 300^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи  $45 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

*Решение.* Так как лист стали положен на пол, то интенсивность теплообмена с верхней и нижней его поверхности не одинаковая (задача не симметричная), поэтому в качестве определяющего геометрического размера при расчете безразмерных чисел Био и Фурье будет фигурировать полная толщина пластины (14 мм).

Вычислим величину  $Bi = \frac{\alpha 2\delta}{\lambda}$ . Из табл. П. 1 выпишем значения теплофизических величин для стали, из которой вал изготовлен:

$$\rho = 7900 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 45,4 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$c_p = 0,462 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}; \quad a = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

$$Bi = \frac{\alpha 2\delta}{\lambda} = \frac{45 \cdot 14 \cdot 10^{-3}}{45,4} = 0,014.$$

Величина  $Bi < 0,1$ , следовательно, задача решается аналитически.

Для пластины закон распределения температуры имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-BiFo}, \text{ где } \vartheta = t - t_{\text{ж}}, \text{ а } \vartheta_0 = t_0 - t_{\text{ж}}.$$

Для ответа на вопрос о времени нагрева выразим безразмерное число Фурье из выражения  $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-BiFo}$ , прологарифмировав его левую

и правую части:  $\ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = -BiFo$ . Из этого равенства найдем величину безразмерного числа Фурье:

$$Fo = \frac{\ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0}}{-Bi} = \frac{\ln \frac{(300 - 400)}{(20 - 400)}}{-0,014} = \frac{\ln \frac{-100}{-380}}{-0,014} = \frac{\ln 0,263}{-0,014} = \frac{-1,335}{-0,014} = 95,4.$$

Зная величину безразмерного числа Фурье, найдем время нагрева листа стали:

$$\tau = \frac{Fo(2\delta)^2}{a} = \frac{95,4 \cdot 0,014^2}{12,5 \cdot 10^{-6}} = 1496 \text{ с} = 24,93 \text{ мин}.$$

**Пример 4.** Вычислить коэффициент теплоотдачи от медного цилиндра, погруженного в воду, если в процессе охлаждения после наступления регулярного температурного режима температура цилиндра за 100 сек уменьшилась с 80 °С до 30 °С. Температура воды 15 °С. Радиус цилиндра 0,1 м. Плотность меди 8700 кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоемкость меди 381 Дж/(кг·К). Коэффициент неравномерности распределения температуры 0,9.

*Решение.* Для решения этой задачи воспользуемся первой теоремой Кондратьева, согласно которой, темп охлаждения однородного и изо-

тропного тела пропорционален коэффициенту теплоотдачи, площади поверхности тела и обратно пропорционален удельной теплоемкости, плотности и объему тела:

$$m = \frac{\alpha F}{c_p \rho V} \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V},$$

где  $\bar{\vartheta}_F/\bar{\vartheta}_V$  — коэффициент неравномерности распределения температур по поверхности и объему тела. Выразим из этого выражения коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{m \cdot c_p \cdot \rho \cdot V}{F \cdot \bar{\vartheta}_F / \bar{\vartheta}_V}.$$

Учитывая, что при регулярном режиме натуральный логарифм избыточной температуры тела изменяется во времени по линейному закону, рассчитаем темп охлаждения по формуле

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

В этом выражении  $\vartheta_1 = t_1 - t_{\text{ж}} = 80 - 15 = 65^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_2 = t_2 - t_{\text{ж}} = 30 - 15 = 15^\circ\text{C}$ ,  $\tau_2 - \tau_1 = 100$  с. Тогда  $m = \frac{\ln 65 - \ln 15}{100} = 0,0147$ . Подставляя в формулу для

расчета коэффициента теплоотдачи значение темпа охлаждения, а также расписывая объем и площадь поверхности цилиндра через его радиус и длину, получаем величину коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = \frac{m \cdot c_p \cdot \rho \cdot V}{F \cdot \bar{\vartheta}_F / \bar{\vartheta}_V} = \frac{m \cdot c_p \rho \cdot \pi \cdot r^2 l}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \bar{\vartheta}_F / \bar{\vartheta}_V} = \frac{0,0147 \cdot 381 \cdot 8700 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,9} = 2707 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

## Глава 2

# КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

---

**П**ри движении жидкостей (напомним, что под жидкостью понимается любая текучая среда, например вода, воздух, жидкий металл) с неоднородным распределением температуры перенос теплоты неразрывно связан с движением самой жидкости. При перемещении какой-либо жидкости с плотностью  $\rho$  и скоростью  $w$  происходит перенос массы. Вместе с массой жидкости переносится и теплота  $q_k = \rho w h$ , где  $h$  — энтальпия жидкости, Дж/кг. Как уже говорилось во введении, в движущихся средах теплота переносится не только конвекцией, но и теплопроводностью, так как при движении неизбежно происходит столкновение отдельных молекул, имеющих различную энергию. Поэтому конвективный теплообмен — это совместный перенос теплоты внутри жидкости за счет ее движения (конвекции) и теплопроводности. Конвективный теплообмен, происходящий внутри жидкости, описывается уравнением  $q = -\lambda \nabla t + \rho w h$ .

В инженерных расчетах интерес представляет конвективный теплообмен между жидкостью и соприкасающейся с ней поверхностью, т. е. процесс теплоотдачи (его интенсивность), а знание переноса теплоты внутри самой жидкости представляет косвенный интерес, так как интенсивность переноса теплоты внутри жидкости отражается на процессе теплоотдачи.

## 2.1. Основные положения конвективного теплообмена между жидкостью и соприкасающейся с ней поверхностью

**Уравнение теплоотдачи.** Для количественного описания процесса теплоотдачи используется уравнение Ньютона — Рихмана, которое для элемента поверхности  $dF$  записывается в виде  $dQ = \alpha(t_c - t_j)dF$ . В интегральной форме  $Q = \bar{\alpha}(t_c - t_j)F$ , или для единицы площади поверхности

$$q = \bar{\alpha}(t_c - t_j). \quad (2.1)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  [Вт/(м<sup>2</sup>·К)] характеризует интенсивность процесса переноса теплоты на границе твердое тело — жидкость.

Интенсивность теплообмена может быть неодинакова по поверхности тела, вследствие чего численные значения коэффициента теплоотдачи для разных участков поверхности будут неодинаковы. Различают местный (локальный) коэффициент теплоотдачи  $\alpha = \frac{dQ}{(t_c - t_j)dF}$  и средний по поверхности тела —

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{(t_c - t_j)F}. \quad (2.2)$$

Величина коэффициента теплоотдачи зависит от многих факторов: от формы тела, его размеров и ориентации в потоке жидкости; скорости движения жидкости и ее температуры; физических свойств жидкости и режимов ее движения; от того, нагревается или охлаждается жидкость (направления теплового потока) и т. д. Большинство из перечисленных факторов являются гидродинамическими. Поэтому предварительно рассмотрим некоторые вопросы гидродинамики, имеющие большое значение для понимания процесса теплоотдачи.

**Виды движения (конвекции) жидкости.** Различают вынужденное и свободное (естественное) движение жидкости. Движение называется вынужденным, если оно происходит за счет внешних сил, не связанных с процессом теплообмена (например, за счет сообщения жидкости энергии насосом или вентилятором). Движение называется естественным (свободным), если оно происходит за счет разности плотностей нагретых и холодных макрообъемов жидкости в гравитационном поле.

**Режимы движения жидкости.** Движение жидкости может быть установившимся и неуставившимся. Установившимся называется такое движение, при котором скорость во всех точках пространства, занятого жидкостью, не изменяется во времени. Если скорость потока изменяется во времени (по величине или направлению), то движение будет неуставившимся.

Экспериментально установлено [4] два режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме все частицы жидкости движутся параллельно друг другу и ограждающим поверхностям. При турбулентном режиме наряду с направленным движением вдоль потока частицы могут участвовать в поперечном и даже обратном движении. При этом скорость жидкости непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению. На рис. 2.1 приведена осциллограмма колебаний скорости в выделенной точке турбулентного потока, имеющего постоянную среднюю скорость течения  $w$ .

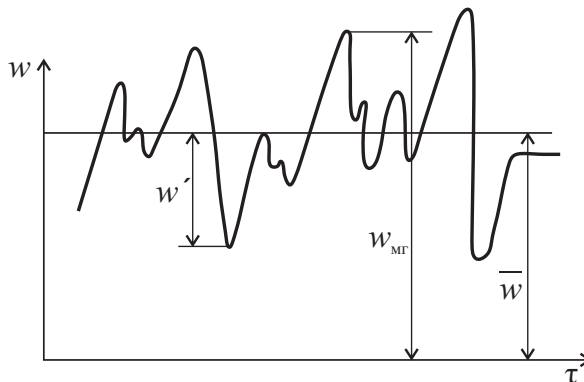


Рис. 2.1. Осциллограмма изменения скорости в выделенной точке потока

Из рисунка следует, что мгновенная скорость  $w_{\text{мг}}$  непрерывно изменяется во времени как по величине, так и по направлению. Отклонение мгновенной скорости от средней называют пульсацией скорости (пульсационной составляющей скорости) и обозначают  $w'$ .

Турбулентное движение состоит как бы из течения со средней скоростью  $\bar{w}$  и наложенного на него хаотического пульсационного течения. При турбулентном режиме течение считается установившимся, если средняя скорость в каждой точке потока не изменяется во времени.



При пульсациях скорости происходит перенос механической энергии. Если жидкость неравномерно нагрета, то пульсации скорости приводят к переносу теплоты, вследствие чего возникают пульсации температуры. Турбулентное течение характеризуется степенью турбулентности потока ( $Tu$ ), равной отношению средней квадратичной пульсации составляющих вектора скорости в данной точке турбулентного потока к осредненному значению скорости в той же точке:

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}[(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + (w'_z)^2]}}{\bar{w}_0}, \quad (2.3)$$

где  $w'_x$ ,  $w'_y$ ,  $w'_z$  — пульсационные составляющие скорости в какой-либо точке турбулентного потока;  $\bar{w}_0$  — осредненное значение скорости в той же точке потока.

Различают мелкомасштабные и крупномасштабные пульсации. Под масштабом пульсаций понимают порядок длины, на которой происходит существенное изменение скорости. Крупномасштабные пульсации — это пульсации, размер которых соизмерим с геометрическим размером системы (диаметром трубы или шириной канала, характерным размером обтекаемого тела и т. д.). Частоты крупномасштабных пульсаций низкие, поэтому такие пульсации определяют процессы турбулентного смешения (диффузию и теплообмен), а мелкомасштабные пульсации, имеющие большую частоту, осуществляют вязкую диссипацию (рассеивание) энергии.

Выделение ламинарного и турбулентного режимов имеет большое значение, так как в зависимости от режима различным будет механизм переноса теплоты в жидкости. При ламинарном режиме теплота в поперечном направлении потока переносится лишь путем теплопроводности, а при турбулентном, кроме того, — и за счет турбулентных пульсаций.

**Понятие пограничного слоя.** Исследования [5] показали, что в потоке вязкой жидкости, омывающем какое-либо тело, по мере приближения к его поверхности скорость уменьшается и на самой поверхности исчезающего тонкого слоя жидкости должна становиться равной нулю. Это предположение получило название гипотезы прилипания. Эта гипотеза справедлива до тех пор, пока жидкость можно рассматривать как сплошную среду.

Пусть неограниченный поток жидкости движется вдоль плоской поверхности (рис. 2.2).

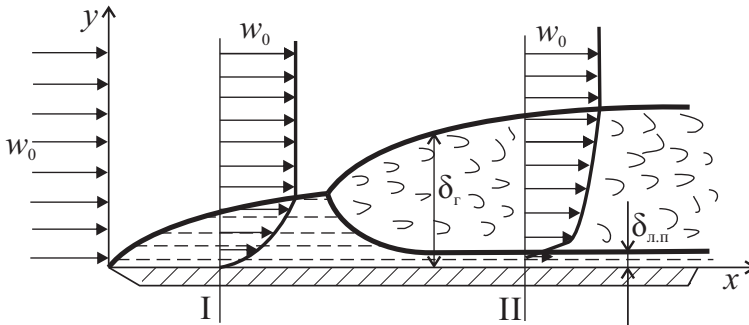


Рис. 2.2. Гидродинамический пограничный слой и изменение скорости жидкости по его сечению

Скорость жидкости вдали от нее равна  $w_0$ , а на самой поверхности, согласно гипотезе прилипания, равна нулю. Следовательно, около поверхности существует слой заторможенной жидкости, называемый гидродинамическим пограничным слоем, в котором скорость изменяется от 0 до  $w_0$ . Поскольку скорость в пограничном слое приближается к  $w_0$  асимптотически, то толщиной гидродинамического пограничного слоя  $\delta_r$  называется расстояние от поверхности, на котором скорость отличается от  $w_0$  на 1 % [5].

По мере движения вдоль поверхности толщина пограничного слоя растет. Вначале образуется ламинарный пограничный слой, который с ростом толщины становится неустойчивым и разрушается, превращаясь в турбулентный пограничный слой. Однако и здесь вблизи поверхности сохраняется тонкий ламинарный подслой ( $\delta_{л.п}$ ), в котором жидкость движется ламинарно. На рис. 2.2 показано изменение скорости в пределах ламинарного (сечение I) и турбулентного (сечение II) пограничных слоев.

Если температура потока отличается от температуры стенки, то наряду с гидродинамическим образуется тепловой пограничный слой, в котором температура изменяется от  $t_c$  до  $t_0$  (рис. 2.3).

Под толщиной теплового пограничного слоя  $\delta_r$  понимают расстояние от поверхности, на котором температура жидкости отличается от  $t_0$  на 1 % [5].

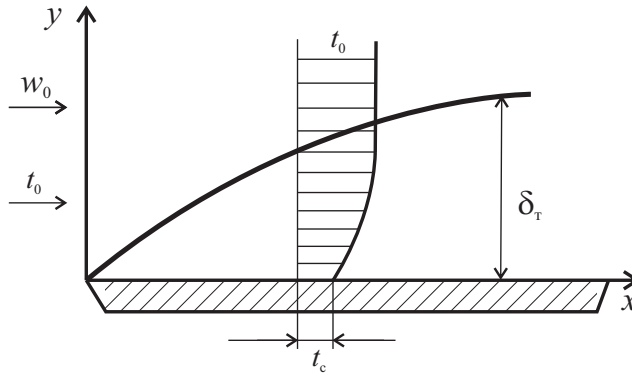


Рис. 2.3. Тепловой пограничный слой и изменение температуры жидкости по его сечению

В общем случае  $\delta_t \neq \delta_v$ . Характер процессов, протекающих в тепловом пограничном слое, а также его толщина однозначно определяют интенсивность теплообмена между стенкой и жидкостью.

**Физические свойства жидкости, существенные для процесса теплоотдачи.** На интенсивность процесса теплоотдачи влияют физические и теплофизические свойства жидкости: плотность  $\rho$ ; теплоемкость  $c_p$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda$ ; коэффициент температуропроводности  $a$ .

Кроме того, все реальные жидкости обладают вязкостью, которая проявляется в том, что при движении соседних слоев жидкости с разными скоростями между ними возникают силы, препятствующие движению.

Если в потоке жидкости мысленно выделить элементарную площадку, нормальную к потоку жидкости, то вследствие вязкости в ее пределах будет действовать сила сопротивления. Отношение этой силы к площади выделенной площадки называется касательным напряжением  $S$ . Величина касательного напряжения пропорциональна градиенту скорости в направлении нормали к потоку движущейся жидкости:

$$S = \mu \frac{\partial w}{\partial n} \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]. \quad (2.4)$$

Эта зависимость носит название закона Ньютона для вязких жидкостей, а  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости  $[(\text{Н} \cdot \text{с})/\text{м}^2]$ . От-

ношение  $\mu/\rho = \nu$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$  называется коэффициентом кинематической вязкости. С ростом температуры для капельных жидкостей коэффициенты  $\mu$  и  $\nu$  уменьшаются, а для газов — возрастают.

Все реальные жидкости под действием давления сжимаются, характеристикой этого является коэффициент сжатия (сжимаемости) представляющей собой относительное изменение объема при изменении давления на 1 бар при  $t = \text{const}$ . Знак *минус* в (2.5) свидетельствует о том, что при сжатии объем среды уменьшается. Объем газов уменьшается пропорционально увеличению давления. Вода — практически несжимаемая жидкость (при изменении давления на 1 бар объем воды уменьшается всего на  $1/20000$ ).

$$\xi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \bigg|_{t=\text{const}} [1/\text{бар}], \quad (2.5)$$

Большое значение для процессов теплоотдачи имеет тепловое расширение жидкостей, которое характеризуется коэффициентом объемного расширения

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \bigg|_{p=\text{const}} [1/K], \quad (2.6)$$

представляющим собой относительное изменение объема при изменении температуры на 1 градус при  $p = \text{const}$ . Для капельных жидкостей коэффициент  $\beta$  является табличной величиной, а для газов, если считать их идеальными, т. е. подчиняющимися закону Клапейрона,

$$\beta = \frac{1}{T_{\text{ж}}}. \quad (2.7)$$

## 2.2. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена для однородной инертной среды

Тепловой поток при конвективном теплообмене между жидкостью и стенкой определяется по уравнению теплоотдачи  $Q = \alpha(t_{\text{с}} - t_{\text{ж}})F$ , если известен коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . Но коэффициент теплоотдачи, как было сказано выше, зависит от многих факторов. Поэтому основной задачей конвективного теплообмена является определение коэффициента теплоотдачи.

### 2.2.1. Уравнение теплоотдачи

Пусть некоторое тело омывается жидкостью с температурой  $t_{\text{ж}} > t_{\text{с}}$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . Согласно уравнению (2.2), плотность теплового потока, передаваемого от жидкости к стенке, определится по уравнению теплоотдачи

$$q = \alpha(t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}). \quad (2.8)$$

Этот поток теплоты пройдет и через неподвижный (согласно гипотезе прилипания) слой жидкости, непосредственно соприкасающийся со стенкой, и, согласно (1.4), определится по формуле

$$q = -\lambda \left. \frac{dt}{dn} \right|_{\text{с}}, \quad (2.9)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности жидкости;  $\left. \frac{dt}{dn} \right|_{\text{с}}$  — градиент температуры в жидкости, соприкасающейся со стенкой.

Приравнявая (2.8) к (2.9), получаем дифференциальное уравнение теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}} \left. \frac{dt}{dn} \right|_{\text{с}}. \quad (2.10)$$

В этом уравнении, кроме искомой величины  $\alpha$ , неизвестным является также градиент температуры жидкости  $\left. \frac{dt}{dn} \right|_{\text{с}}$  в пристенном слое.

Для нахождения распределения температуры жидкости в пристенном слое рассмотрим дифференциальное уравнение энергии.

### 2.2.2. Уравнение энергии

Это уравнение выводится аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности для твердого тела (см. раздел 1.2) с той лишь разницей, что если в твердом теле теплота передается только теплопроводностью, то в жидкости перенос теплоты происходит и теплопроводностью и за счет движения, т. е. конвекцией. Поэтому в правой

части уравнения (1.14) вместо частной производной  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  будет полная производная температуры по времени:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z.$$

Учитывая это, уравнение энергии для жидкости в отсутствие внутренних источников теплоты запишется в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (2.11)$$

Из этого уравнения следует, что для определения температурного поля в жидкости необходимо знать закономерность распределения скоростей жидкости в пристенном слое.

### 2.2.3. Уравнение движения

Если на элементарный объем в потоке жидкости действуют силы тяжести, подъемные силы, силы давления и вязкости, то, согласно второму закону Ньютона, уравнение движения в векторной форме запишется [6] в виде

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = \rho \vec{g} + \rho \beta \vartheta \vec{g} - \nabla p + \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial z^2} \right), \quad (2.12)$$

где  $\frac{D\vec{w}}{d\tau}$  — субстанциональная (полная) производная вектора скорости  $\vec{w}$  по времени:

$$\frac{D\vec{w}}{d\tau} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vec{w}}{\partial z}.$$

Этому уравнению в скалярной форме соответствуют три уравнения, записанные в проекциях на оси  $x, y, z$ . Например, в проекции на ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) = \\ = \rho g_x + \rho \beta \vartheta g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогичные записи будут для проекций на оси  $y$  и  $z$ . Поскольку в уравнение движения входит еще одна неизвестная величина — градиент давления в пристенном слое жидкости ( $\nabla \bar{p}$ ), то для получения замкнутой системы добавим еще уравнение неразрывности (сплошности) потока.

#### 2.2.4. Уравнение неразрывности потока

Для установившегося потока жидкости, согласно закону сохранения массы, расход ( $G = \rho w f$ , кг/с) жидкости через любое сечение остается неизменным, поэтому для двух выбранных сечений запишем  $G_1 = G_2$  или  $\rho_1 w_1 f_1 = \rho_2 w_2 f_2$ , а изменение расхода жидкости  $\Delta G = 0$ .

В дифференциальной форме уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости имеет вид  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$ . Для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) —

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

#### 2.2.5. Система дифференциальных уравнений для определения коэффициента теплоотдачи

Для нахождения коэффициента теплоотдачи необходимо решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha &= - \frac{\lambda}{t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}} \frac{dt}{dn} \bigg|_{\text{с}}, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} &= a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \\ \frac{D\bar{w}}{d\tau} &= \bar{g} + \beta \vartheta \bar{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для того чтобы получить частное решение для конкретной задачи, к этой системе дифференциальных уравнений необходимо добавить условия однозначности, рассмотренные в разделе 1.2.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  является трудноопределяемой величиной, так как зависит от очень многих физических и геометрических параметров, часть из которых перечислена при анализе формулы (2.2).

О сложности его математического вычисления свидетельствует и система дифференциальных уравнений (2.15).

Эта система дифференциальных уравнений, описывающая процесс теплоотдачи, даже при введении упрощающих предпосылок решается только для некоторых простейших случаев. Для подавляющего большинства задач единственным способом получения закономерностей по конвективному теплообмену является эксперимент. Однако и постановка эксперимента сопряжена с большими трудностями. Во-первых, коэффициент теплоотдачи, согласно дифференциальным уравнениям конвективного теплообмена (2.15), функционально зависит от большого количества переменных  $\alpha = f(x, y, z, w_x, w_y, w_z, t_c, t_{ж}, \lambda, \nu, \rho, p, \dots)$  и, чтобы экспериментально установить зависимость  $\alpha$  от каждой из этих переменных, необходимо затратить огромное количество времени. Во-вторых, постановка эксперимента ведется на опытной установке в лабораторных (комфортных) условиях, поэтому возникает вопрос, можно ли воспользоваться результатами лабораторного эксперимента для расчета процессов, протекающих в промышленных аппаратах и заводских условиях?

Все эти трудности можно разрешить, если воспользоваться теорией подобия, которая позволяет сократить количество переменных (путем объединения их в безразмерные комплексы), от которых зависит коэффициент теплоотдачи. Теория подобия также формулирует теоремы подобия физических явлений, соблюдение которых позволяет грамотно поставить эксперимент в лабораторных условиях, результатами которого можно пользоваться при расчете теплообменных процессов, протекающих в промышленных установках.



## 2.3. Элементы теории подобия

Термин *подобие* взят из геометрии, где рассматривались подобные фигуры. Аналогичная ситуация может наблюдаться и для физических явлений. Это подобие более высокого порядка. Оно подразумевает не только геометрическое подобие систем, в которых протекают процессы, но и подобие физических, временных и граничных условий.

Подобными называются явления, происходящие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках отношения одноименных величин есть постоянные числа [7]. Эти отношения называются константами подобия.

Теория подобия оперирует с обобщенными переменными (безразмерными числами или критериями подобия). Безразмерные числа могут быть получены методом масштабных преобразований или методом анализа размерностей. Первый применяется в том случае, если явление изучено в такой степени, что известно аналитическое описание процесса. Второй используется для малоизученных явлений, когда отсутствует аналитическое описание процесса.

Приведем к безразмерному виду дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (2.15), пользуясь методом масштабных преобразований.

### 2.3.1. Приведение дифференциальных уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду

Обычно на практике имеют дело с установившимся потоком жидкости при стационарном тепловом режиме, поэтому  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} = 0$ . Кроме того, если пренебречь влиянием силы тяжести ( $\rho g = 0$  в уравнении движения) и ввести избыточную температуру  $\vartheta = t - t_c$  и  $\vartheta_0 = t_{ж} - t_c$ , то система уравнений (2.15) запишется в виде

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_c, \quad (2.16)$$

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right), \quad (2.17)$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = \beta \vartheta g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

Систему уравнений необходимо дополнить условиями однозначности, которые зависят от конкретной постановки задачи. Однако в любом случае должны быть указаны геометрический размер системы, например  $l_0$ , температура стенки  $t_c$ , температура и скорость жидкости  $t_{ж}$ ,  $w_0$  соответственно, физические параметры  $c_p$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  и т. д.

При приведении дифференциальных уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду выберем в качестве масштабов: для длины —  $l_0$ ; для температуры —  $\vartheta_0 = t_{ж} - t_c$ ; для скорости —  $w_0$ . Поделив соответствующие размерные переменные на их масштаб, получим величину переменной с нулевой размерностью (безразмерную величину):

$$\frac{x}{l_0} = X, \quad \frac{y}{l_0} = Y, \quad \frac{z}{l_0} = Z \text{ — безразмерные координаты;}$$

$$\frac{w_x}{w_0} = W_x, \quad \frac{w_y}{w_0} = W_y, \quad \frac{w_z}{w_0} = W_z \text{ — безразмерные проекции скорости;}$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \theta \text{ — безразмерная температура.}$$

Тогда соответствующие размерные величины найдутся как

$$x = l_0 X, \quad y = l_0 Y, \quad z = l_0 Z, \quad w_x = w_0 W_x, \quad w_y = w_0 W_y, \quad w_z = w_0 W_z, \quad \vartheta = \vartheta_0 \theta. \quad (2.20)$$

**Уравнение теплоотдачи.** После подстановки соответствующих соотношений (2.20) в уравнение (2.16) имеем  $\alpha = - \frac{\lambda}{\vartheta_0} \frac{\partial(\vartheta_0 \theta)}{\partial(l_0 X)} \Big|_c$ . Выносим

постоянные величины  $(\vartheta_0, l_0)$  за знак дифференциала, делаем сокращения, переносим  $l_0$  и  $\lambda$  из правой части равенства в левую часть и получаем  $\frac{\alpha l_0}{\lambda} = - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_c$ , где  $\frac{\alpha l_0}{\lambda}$  — безразмерная величина.

**Уравнение энергии.** После подстановки соответствующих соотношений (2.20) в уравнение (2.17) получаем

$$w_0 W_x \frac{\partial(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 X)} + w_0 W_y \frac{\partial(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 Y)} + w_0 W_z \frac{\partial(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 Z)} = a \left[ \frac{\partial^2(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 X)^2} + \frac{\partial^2(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 Y)^2} + \frac{\partial^2(\vartheta_{0,})}{\partial(l_0 Z)^2} \right].$$

Выносим за знак дифференциала постоянные величины, сокращаем левую и правую части равенства на  $\vartheta_0$ . Умножаем обе части равенства на  $\frac{l_0^2}{a}$ , находим, что

$$\frac{w_0 l_0}{a} \left( W_x \frac{\partial}{\partial X} + W_y \frac{\partial}{\partial Y} + W_z \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

где  $\frac{w_0 l_0}{a}$  является безразмерной величиной.

**Уравнение движения.** В результате аналогичной подстановки соотношений (2.20) в уравнение (2.18) получаем

$$\begin{aligned} w_0 W_x \frac{\partial(w_0 W_x)}{\partial(l_0 X)} + w_0 W_y \frac{\partial(w_0 W_x)}{\partial(l_0 Y)} + w_0 W_z \frac{\partial(w_0 W_x)}{\partial(l_0 Z)} = \\ = \beta \vartheta_0 \theta g - \frac{1}{\dot{A}} \frac{\partial p}{\partial(l_0 X)} + v \left[ \frac{\partial^2(w_0 W_x)}{\partial(l_0 X)^2} + \frac{\partial^2(w_0 W_x)}{\partial(l_0 Y)^2} + \frac{\partial^2(w_0 W_x)}{\partial(l_0 Z)^2} \right]. \end{aligned}$$

Вынося за знак дифференциала постоянные величины, умножая левую и правую части равенства на  $\frac{l_0}{w_0^2}$  и делая ряд преобразований, находим

$$\begin{aligned} W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial Z} = \frac{g \beta \vartheta_0 l_0^3}{v^2} \frac{1}{\left( \frac{w_0 l_0}{v} \right)^2} \theta - \\ - \frac{\partial \left( \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} \right)}{\partial X} + \frac{1}{\frac{w_0 l_0}{v}} \left( \frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Z^2} \right). \end{aligned}$$

Комплексы  $\frac{g \beta \vartheta_0 l_0^3}{v^2}$ ,  $\frac{w_0 l_0}{v}$ ,  $\frac{\Delta p}{\rho w_0^2}$  имеют нулевую размерность, т. е. являются безразмерными величинами.

**Уравнение неразрывности.** После подстановки соответствующих соотношений (2.20) в уравнение (2.19) и сокращения на  $\frac{w_0}{l_0}$  получаем

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0.$$

Таким образом, после приведения дифференциальных уравнений (2.16)...(2.19) к безразмерному виду, кроме ранее введенных безразмерных величин  $X, Y, Z, W_x, W_y, W_z, \theta$ , были получены безразмерные комплексы  $\frac{\alpha l_0}{\lambda}, \frac{w_0 l_0}{a}, \frac{g \beta \vartheta l_0^3}{\nu^2}, \frac{w_0 l_0}{\nu}, \frac{\Delta p}{\rho w_0^2}$ , называемые числами подобия,

которым присвоены имена выдающихся мировых ученых, внесших значительный вклад в развитие теплофизики;  $\frac{\alpha l_0}{\lambda} = \text{Nu}$  — безразмерное число Нуссельта. Оно характеризует интенсивность процесса теплоотдачи на границе стенка-жидкость.

*Замечание.* Безразмерное число Нуссельта и безразмерное число Био (Bi) (раздел 1.6) составлены из одинаковых размерных величин. Отличие между ними в том, что в безразмерном числе Нуссельта  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности жидкости, а в Bi —  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности твердого тела. Кроме того, в безразмерном числе Нуссельта  $\alpha$  является величиной определяемой, а в Bi значение  $\alpha$  задается;

$$\frac{w_0 l_0}{a} = \text{Pe} — \text{безразмерное число Пекле. Характеризует соотношение}$$

между теплом, переданным за счет конвекции и теплопроводности;

$$\frac{g \beta \vartheta l_0^3}{\nu^2} = \text{Gr} — \text{безразмерное число Грасгофа. Характеризует подъ-}$$

емные силы, обусловленные разностью плотностей нагретых и холодных частей жидкости, находящейся в гравитационном поле. Является основным безразмерным числом при описании свободной конвекции;

$$\frac{w_0 l_0}{\nu} = \text{Re} — \text{безразмерное число Рейнольдса. Характеризует соотно-}$$

шение между силами инерции и вязкости. По величине числа Рейнольдса определяется режим движения жидкости при ее вынужденном течении;

$\frac{\Delta p}{\rho w_0^2} = \text{Eu}$  — безразмерное число Эйлера. Характеризует соотношение между силами давления и инерции.

Безразмерное число Пекле (Pe) представляет собой произведение двух безразмерных чисел:

$$\text{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a} \cdot \frac{v}{v} = \frac{w_0 l_0}{v} \cdot \frac{v}{a} = \text{Re} \cdot \text{Pr},$$

где  $\text{Pr} = \frac{v}{a}$  — безразмерное число Прандтля, которое характеризует теплофизические свойства жидкости и является табличной величиной, так как целиком состоит из теплофизических параметров.

С учетом введенных обозначений уравнения (2.16)... (2.19) можно записать в виде

$$\text{Nu} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_c,$$

$$\text{Pe} \left( W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W_z \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2},$$

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial Z} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta - \frac{\partial (\text{Eu})}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Z^2} \right),$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0.$$

Безразмерные комплексы можно рассматривать в качестве новых переменных, тогда решение для искомых величин можно представить в виде следующих уравнений, называемых критериальными:

$$\text{Nu} = f_1(X, Y, Z, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}),$$

$$\theta = f_2(X, Y, Z, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}),$$

$$\text{Eu} = f_3(X, Y, Z, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}),$$

$$W = f_4(X, Y, Z, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}).$$

Безразмерные числа делятся на определяющие и определяемые. Определяющие — это безразмерные числа (Re, Pr, Gr, ...), составленные из независимых переменных и величин, входящих в условия од-

нозначности. Определяемые — это безразмерные числа ( $Nu$ ,  $Eu$ , ...), в которые входят искомые величины.

**Теоремы подобия.** Для подобия физических явлений необходимо и достаточно, чтобы:

- а) явления имели одинаковую физическую природу и описывались одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями;
- б) условия однозначности были одинаковыми во всем, кроме численных значений физических и теплофизических величин;
- в) соответствующие определяющие безразмерные числа были равны.

Из этих теорем следует, что критериями подобия являются лишь определяющие безразмерные числа.

### **2.3.2. Моделирование процессов конвективного теплообмена**

Из теорем подобия следует, что для подобных процессов соответствующие определяющие безразмерные числа равны. Но каждое безразмерное число может быть представлено в виде большого числа комбинаций входящих в него величин. Следовательно, изучив всего лишь одно конкретное явление, можно получить информацию о других подобных явлениях, безразмерные числа которых равны. На этом принципе основан широко распространенный метод исследования, называемый методом модели или моделирования.

Сущность моделирования состоит в замещении объекта исследования: вместо искомого объекта, называемого образцом, исследуется другой объект, называемый моделью. При этом к модели предъявляется лишь одно требование — она должна быть подобна образцу, тогда результаты, полученные на модели, можно распространить на образец. Следовательно, модель и образец должны удовлетворять всем условиям теорем подобия.

Такое моделирование называется точным, но осуществить его очень сложно, поэтому на практике пользуются различными методами приближенного моделирования. Один из них основан на явлении автомодельности. Исследования показывают, что роль каждого безразмерного числа различна в зависимости от условий. При одних условиях безразмерное число может существенно влиять на процесс,

при других — роль его ослабевает или вообще исчезает. В последнем случае говорят о вырождении данного безразмерного числа. Явление вырождения какого-либо безразмерного числа и называется автомодельностью. Определяемое безразмерное число считается автомодельным по отношению к некоторому определяющему безразмерному числу, если оно не зависит от последнего. При наличии автомодельности нет смысла выполнять условия равенства этих безразмерных чисел.

Другой приближенный метод, называемый локальным моделированием, состоит в том, что моделирование осуществляется не во всем объеме пространства, в котором протекает процесс, а только там, где производятся необходимые измерения. Например, при постановке эксперимента по исследованию коэффициента теплоотдачи при поперечном обтекании жидкостью пучка труб можно в каждой трубке поставить нагреватель и термопары, а можно — только в одной, находящейся после третьего ряда по ходу потока жидкости, т. е. осуществить локальное моделирование процесса.

### 2.3.3. Критериальные уравнения

Теория подобия лежит в основе экспериментального исследования. Поскольку безразмерные числа подобия можно рассматривать в качестве новых переменных, то при проведении эксперимента необходимо организовать измерение величин, входящих в безразмерные числа подобия, как определяющих, так и определяемых. Полученные результаты надо обрабатывать в виде критериальных уравнений.

Вид критериальных уравнений устанавливается экспериментальным путем. Исследования показали, что большинство процессов конвективного теплообмена может быть описано степенной функцией, например,  $Nu = c Re^m Pr^n$ , где  $c, m, n$  — постоянные, определяемые опытным путем. Такие уравнения называются эмпирическими, ими можно пользоваться лишь в интервалах определяющих безразмерных чисел, непосредственно проверенных в опытах.

**Определяющий геометрический размер и определяющая температура.** В безразмерные числа подобия входит некоторый характерный размер  $l_0$ , который называется определяющим. Выбор этого размера за-

висит от исследователя. Обычно в качестве определяющего геометрического размера берется тот размер, который сильнее других влияет на процесс теплоотдачи.

Кроме того, в безразмерные числа подобия входят теплофизические параметры, которые зависят от температуры. Температура, по которой из справочника выписывают значения теплофизических параметров, входящих в безразмерные числа подобия, называется определяющей. От исследователя зависит, какую температуру считать определяющей, так как теория подобия ничего не говорит на этот счет. На практике, обычно, в качестве определяющей берут ту температуру, которую легче всего измерить экспериментальным путем.

## **2.4. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости**

---

Если на какую-либо поверхность набегают поток жидкости со скоростью  $w_0$ , то около поверхности, как уже было сказано ранее (см. рис. 2.2), образуется гидродинамический пограничный слой, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности до скорости невозмущенного потока  $w_0$ . Течение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным (см. рис. 2.2). При турбулентном режиме в непосредственной близости от стенки пульсации скорости жидкости отсутствуют, согласно гипотезе прилипания здесь имеет место тонкий ламинарный подслой  $\delta_{лп}$ . Опыт показывает, что переход из ламинарного режима в турбулентный происходит не в точке, как показано на рис. 2.2, а на некотором участке, течение на котором носит неустановившийся (переходный) характер. Законы теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах движения различны, поэтому знание режима течения жидкости имеет большое значение.

При вынужденном движении жидкости режим течения определяется по величине безразмерного числа  $Re = \frac{w_0 l_0}{\nu}$ , где  $l_0$  — определяющий геометрический размер. Если температура набегающего потока жидкости  $t_{ж}$  и температура поверхности  $t_c$  неодинаковые, то кроме гидродинамического слоя образуется еще и тепловой пограничный слой



(см. рис. 2.3). Соотношения между толщинами гидродинамического ( $\delta_r$ ) и теплового ( $\delta_t$ ) пограничных слоев определяется по величине безразмерного числа Прандтля  $\left(Pr = \frac{\nu}{a}\right)$ . Коэффициент динамической вязкости  $\nu$  характеризует скорость распространения импульса движения жидкости, а коэффициент температуропроводности  $a$  — скорость распространения импульса температуры в среде. Для капельных жидкостей  $Pr > 1$  ( $\nu > a$ ), поэтому толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового слоя ( $\delta_r > \delta_t$ ). Для газов  $Pr \approx 1$  ( $\nu \approx a$ ), поэтому  $\delta_r \approx \delta_t$ . Для жидких металлов  $Pr < 1$  ( $\nu < a$ ),  $\delta_r < \delta_t$ .

#### 2.4.1. Интегральное уравнение теплового потока через пограничный слой (уравнение Кружилина)

Это уравнение используется в качестве аналитической основы при получении расчетных формул для коэффициента теплоотдачи при ламинарном режиме движения жидкости. Вывод этого уравнения можно посмотреть, например в [1]. Здесь же приводится окончательный вид интегрального уравнения для плотности теплового потока, проходящего через тепловой пограничный слой.

$$\frac{q}{\rho c_p} = -\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_0 - t) w_x dy. \quad (2.23)$$

Расположение координат  $x$  и  $y$ , как на рис. 2.3. Уравнение (2.23) впервые было получено Г. Н. Кружилиным, потому так и называется — уравнение Кружилина.

Подставив в (2.23) значение плотности теплового потока согласно закону Фурье (1.4), получим  $\frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{dt}{dy} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_0 - t) w_x dy$  или, учитывая, что  $\lambda/\rho c_p = a$ , запишем уравнение Кружилина в том виде, в котором будем его использовать в дальнейшем:

$$a \left( \frac{dt}{dy} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_0 - t) w_x dy. \quad (2.24)$$

### 2.4.2. Связь между теплоотдачей и трением (аналогия Рейнольдса)

Теоретическое изучение теплоотдачи при турбулентном течении жидкости основывается на гидродинамической теории теплообмена, которая предложена Рейнольдсом. Он предположил, что при турбулентном течении жидкости перенос теплоты и количества движения происходит за счет турбулентных пульсаций конечных масс жидкости. Такое представление позволяет установить связь между теплоотдачей и сопротивлением движущихся микрообъемов жидкости.

*Аналогия Рейнольдса для турбулентного пограничного слоя (ламинарный подслой).* Рассмотрим турбулентный пограничный слой (рис. 2.4). В ламинарном подслое перенос теплоты происходит теплопроводностью, и плотность теплового потока рассчитывается по формуле (1.4)  $q = -\lambda dt/dy$ , а касательные напряжения определяются по формуле (2.4)  $S = \mu \frac{dw_x}{dy}$ . Разделим одно выражение на другое, пренебрегая знаком

минус, получим  $\frac{q}{S} = \frac{\lambda \frac{dt}{dy}}{\mu \frac{dw_x}{dy}}$ , откуда плотность теплового потока, выра-

женная через касательные напряжения в ламинарном подслое, будет иметь вид

$$q = \frac{S \lambda \frac{dt}{dy}}{\mu \frac{dw_x}{dy}} = \frac{S \lambda}{\mu} \frac{dt / dy}{dw_x / dy}. \quad (2.25)$$

*Аналогия Рейнольдса для турбулентного пограничного слоя (турбулентный слой).* Выделим в турбулентном пограничном слое плоскость, параллельную поверхности, вдоль которой течет жидкость (рис. 2.4). Через выделенную поверхность ввиду хаотических турбулентных пульсаций жидкости вниз и вверх будут переходить элементарные объемы жидкости (рис. 2.4). Поскольку они имеют скоростью, то будут обладать и кинетической энергией. Если  $w'_x > w_x$ , то нижние элементарные объемы жидкости ускоряются, а верхние — замедляются. Турбулентный обмен по результату действия аналогичен молекулярным касательным напряжениям в ламинарном подслое, хотя его природа иная. Касательное напряжение  $S_\tau$ , возникающее в выделенной плоскости

за счет турбулентного обмена, называют турбулентным напряжением. Это напряжение можно определить с помощью закона сохранения количества движения

$$S_T = G_T (w'_x - w_x), \quad (2.26)$$

где  $G_T$  — массовый расход жидкости, проходящий через единичную выделенную плоскость.

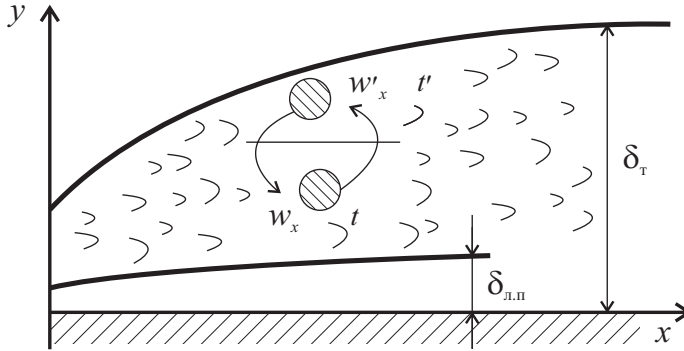


Рис. 2.4. Перенос механического и теплового импульсов через выделенную поверхность в турбулентном пограничном слое

Одновременно с количеством движения через выделенную плоскость (рис. 2.4) переносится и теплота; элементарный объем жидкости, переносимый вверх, имеет энтальпию  $G_T c_p t$ , а элемент жидкости, перемещающийся вниз, имеет энтальпию  $G_T c_p t'$ . Через выделенную плоскость переносится теплота

$$q = G_T c_p (t' - t). \quad (2.27)$$

Выразив из (2.26)  $G_T$  и подставив в (2.27), получим формулу для плотности теплового потока, выраженного через касательные напряжения в турбулентном слое:

$$q = S_T c_p \frac{t' - t}{w'_x - w_x}. \quad (2.28)$$

Формулы записи плотности теплового потока через касательные напряжения (2.25) и (2.28) впервые были получены Рейнольдсом и получили названия *аналогия Рейнольдса*.

### 2.4.3. Влияние направления теплового потока на величину коэффициента теплоотдачи

Направление теплового потока определяет температурное поле в пограничном слое и как следствие — величины физических параметров, зависящих от температуры и влияющих на коэффициент теплоотдачи. Если тепловой поток направлен от стенки к жидкости (жидкость нагревается), то  $t_c > t_{\text{ж}}$  и средняя температура в тепловом пограничном слое будет больше, чем температура жидкости  $t_{\text{ж}}$  вдали от стенки. При обратном направлении теплового потока (от жидкости к стенке)  $t_c < t_{\text{ж}}$  и средняя температура в тепловом пограничном слое будет меньше, чем  $t_{\text{ж}}$ . А это значит, что величины коэффициентов теплопроводности, кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, зависящие от температуры и определяющие коэффициент теплоотдачи, будут неодинаковыми при различных направлениях теплового потока.

Опытным путем было установлено, что влияние направления теплового потока можно учесть введением множителя  $\varepsilon_t = \left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}$ , предложенного М. А. Михеевым [4], где  $\text{Pr}_{\text{ж}}$  берется из таблиц по температуре жидкости ( $t_{\text{ж}}$ ), а  $\text{Pr}_c$  берется из тех же таблиц, но по температуре стенки ( $t_c$ ). Если жидкостью является газ, то поправка  $\left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25} \approx 1$ , так как для газов  $\text{Pr} \approx 1$ .

### 2.5. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости вдоль плоской поверхности

Опытным путем было установлено, что если величина безразмерного числа  $\text{Re}$  при движении жидкости вдоль плоской поверхности не превышает  $10^5$ , то режим течения ламинарный, если  $\text{Re} \geq 10^5$ , то характер течения жидкости турбулентный.

### 2.5.1. Теплоотдача при ламинарном ( $Re < 10^5$ ) режиме движения жидкости вдоль плоской поверхности

**Постановка задачи.** Жидкость, имеющая температуру  $t_0$ , движется вдоль плоской поверхности со скоростью  $w_0$  (рис. 2.5).

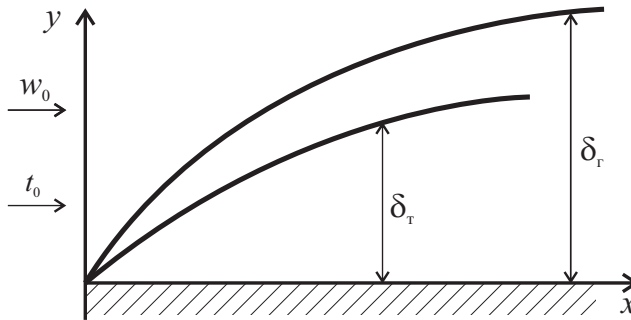


Рис. 2.5. Схема теплового и гидродинамического пограничных слоев

Температура поверхности  $t_c = \text{const}$ . Пусть  $t_0 > t_c$ . Около поверхности образуется ламинарный пограничный слой. Рассматриваем случаи, когда  $Pr \geq 1$ , т. е.  $\delta_r \geq \delta_\tau$ . Считаем, что физические величины ( $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\rho$ ) не зависят от температуры. Требуется получить формулу для расчета среднего коэффициента теплоотдачи или его аналога безразмерного числа Нуссельта.

Для удобства решения задачи введем избыточную температуру  $\vartheta = t - t_c$ ,  $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ , т. е. температуру будем отсчитывать от уровня температуры стенки. Коэффициент теплоотдачи определится из дифференциального уравнения теплоотдачи (2.16):

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=0}.$$

В этом уравнении неизвестен градиент температуры жидкости у стенки.

Опытным путем установлено [1], что распределение температуры в пограничном слое описывается уравнением кубической параболы вида

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( 1,5 \frac{y}{\delta_\tau} - 0,5 \frac{y^3}{\delta_\tau^3} \right). \quad (2.29)$$

Тогда  $\left. \frac{d\vartheta}{dy} \right|_{y=0} = 1,5 \frac{\vartheta_0}{\delta_\tau}$ , а коэффициент теплоотдачи будет определять-

ся выражением

$$\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left. \frac{d\vartheta}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \cdot 1,5 \frac{\vartheta_0}{\delta_\tau} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_\tau}. \quad (2.30)$$

Таким образом, коэффициент теплоотдачи пропорционален коэффициенту теплопроводности жидкости и обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя, которая в свою очередь зависит от координаты  $x$  (см. рис. 2.5).

Для нахождения зависимости  $\delta_\tau = f(x)$  воспользуемся уравнением Кружилина (2.24). В уравнение входит  $w_x$ . Согласно данным [1], распределение скорости в ламинарном пограничном слое описывается уравнением, аналогичным по форме записи уравнению распределения температуры (уравнением кубической параболы):

$$w_x = w_0 \left( 1,5 \frac{y}{\delta_\tau} - 0,5 \frac{y^3}{\delta_\tau^3} \right). \quad (2.31)$$

Подставив в (2.24) выражения (2.29)... (2.31) и вычислив интеграл, получим

$$\alpha \frac{3}{2} \frac{\vartheta_0}{\delta_\tau} = \vartheta_0 w_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{4} \frac{\delta_\tau^2}{\delta_\tau} - \frac{3}{4} \frac{\delta_\tau^2}{\delta_\tau} + \frac{3}{20} \frac{\delta_\tau^2}{\delta_\tau} - \frac{1}{8} \frac{\delta_\tau^4}{\delta_\tau^3} + \frac{3}{20} \frac{\delta_\tau^4}{\delta_\tau^3} - \frac{1}{28} \frac{\delta_\tau^4}{\delta_\tau^3} \right).$$

Обозначим  $\frac{\delta_\tau}{\delta_\tau} = \gamma$  и, выполнив арифметические действия, получим

$$\alpha \frac{3}{2} \frac{\vartheta_0}{\delta_\tau} = \vartheta_0 w_0 \frac{d}{dx} \delta_\tau \left( \frac{3}{20} \gamma^2 - \frac{31}{280} \gamma^4 \right). \quad (2.32)$$

Величина  $\gamma = \frac{\delta_\tau}{\delta_\tau} < 1$ . Поэтому в (2.32) вторым слагаемым по сравнению с первым можно пренебречь, и тогда выражение (2.32) примет вид

$$\frac{10\alpha}{w_0} = \delta_\tau \frac{d}{dx} (\delta_\tau \gamma^2).$$

Учитывая, что  $\gamma$  не зависит от  $x$  (зависимость  $\delta_\tau(x)$ ,  $\delta_\tau(x)$  практически одинаковая (см. рис. 2.5)), вынесем из под знака дифференциала  $\gamma^2$ , запишем

$$\frac{10\alpha}{w_0} = \delta_r \gamma^2 \frac{d}{dx} \delta_r.$$

Умножим правую часть этого выражения на  $\frac{\delta_r}{\delta_r}$ , получим

$$\frac{10\alpha}{w_0} = \delta_r \gamma^3 \frac{d}{dx} \delta_r. \quad (2.33)$$

Известно [6], что при ламинарном режиме движения жидкости  $\delta_r = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}$ . Тогда  $\frac{d\delta_r}{dx} = \frac{4,64\nu^{0,5}}{w_0^{0,5}} 0,5x^{-0,5}$ ,  $\delta_r \frac{d\delta_r}{dx} = 10,76 \frac{\nu}{w_0}$ .

Подставляя это выражение в (2.33) и учитывая, что  $\frac{\nu}{a} = \text{Pr}$ , найдем  $\gamma$ :

$$\gamma^3 = \frac{10}{10,76 \text{Pr}} \frac{1}{\text{Pr}} \approx \frac{1}{\text{Pr}}, \text{ а } \gamma = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (2.34)$$

Следовательно,

$$\frac{\delta_\tau}{\delta_r} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}, \quad \delta_\tau = \frac{\delta_r}{\sqrt[3]{\text{Pr}}} = \frac{4,64 \sqrt{\frac{\nu x \cdot x}{w_0 \cdot x}}}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}.$$

Учитывая, что  $\frac{w_0 x}{\nu} = \text{Re}_x$ , получаем выражение для  $\delta_\tau$ :

$$\delta_\tau = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (2.35)$$

Поставив (2.35) в (2.30), получаем выражение для локального коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 0,33 \frac{\lambda}{x} \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}$ , или  $\frac{\alpha x}{\lambda} = 0,33 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}$ .

Учитывая, что  $\frac{\alpha x}{\lambda} = \text{Nu}_x$ , запишем

$$\text{Nu}_x = 0,33 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}. \quad (2.36)$$

Из уравнения (2.36) следует, что локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha = Cx^{-0,5}$ , где  $C$  — комбинация постоянных величин, входящих в формулу (2.36). Найдем среднее значение коэффициента теплоотдачи ( $\bar{\alpha}$ ) по длине ( $l$ ) плоской поверхности:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha dx = \frac{1}{l} \int_0^l Cx^{-0,5} dx = 2Cl^{-0,5},$$

т. е. величина среднего коэффициента теплоотдачи в два раза больше значения локального коэффициента теплоотдачи ( $\bar{\alpha} = 2\alpha$ ). Тогда

$$\bar{Nu}_l = 0,66 Re_l^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (2.37)$$

В формулы (2.36) и (2.37), полученные аналитически, необходимо ввести множитель, учитывающий направление теплового потока.

**Расчетные формулы.** Формулы для расчета соответственно локального и среднего по длине коэффициентов теплоотдачи при ламинарном течении жидкости вдоль плоской поверхности имеют вид

$$Nu_{ж,x} = 0,33 Re_{ж,x}^{0,5} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.38)$$

$$Nu_{ж,x} = \frac{\alpha x}{\lambda} \rightarrow \alpha = \frac{Nu_{ж,x} \lambda}{x}.$$

$$\bar{Nu}_{ж,l} = 0,66 Re_{ж,l}^{0,5} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.39)$$

$$\bar{Nu}_{ж,l} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu}_{ж,l} \lambda}{l}.$$

За определяющую температуру при расчете по этим формулам принимается температура набегающего потока жидкости  $t_{ж} = t_0$ . Определяющим геометрическим размером в (2.38) является координата  $x$  точки, для которой локальный коэффициент теплоотдачи рассчитывается, а в (2.39) — длина  $l$ .

## 2.5.2. Теплоотдача при турбулентном ( $Re \geq 10^5$ ) режиме движения жидкости вдоль плоской поверхности

**Постановка задачи.** Пусть на плоскую поверхность набегают турбулентный поток жидкости, скорость которого  $w_0$ , а температура  $t_{ж} = t_0$ . Температура стенки  $t_c = \text{const}$  ( $t_0 > t_c$ ). Теплофизические величины не зависят от температуры.  $Pr \approx 1$ . Требуется получить формулу для расчета среднего коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта).



Для решения этой задачи воспользуемся аналогией Рейнольдса (формулы 2.25 и 2.28). Обозначим температуру и скорость жидкости в характерных точках в пограничном слое, как показано на рис. 2.6.

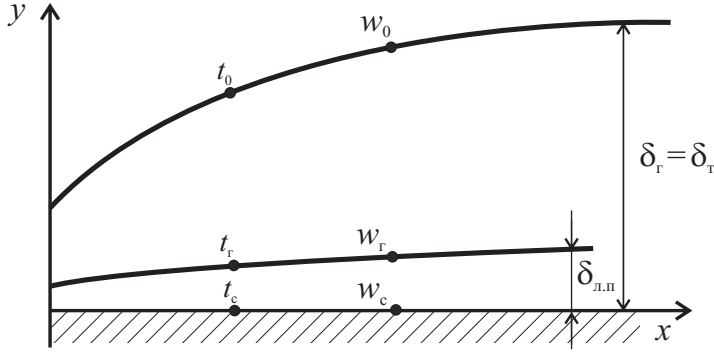


Рис. 2.6. Обозначение температуры и скорости жидкости в характерных точках пограничного слоя

Тепловой поток, который пройдет через турбулентный пограничный слой, определяется по формуле (2.28). Этот же тепловой поток пройдет и через ламинарный подслой и определится по формуле (2.25). Считая, что касательные напряжения в ламинарном подслое не изменяются и на границе с турбулентным слоем не испытывают разрыва, т. е.  $S = S_t$ , формулы (2.25) и (2.28) в обозначениях, сделанных на рис. 2.6, запишутся в виде

$$q = S \frac{\lambda}{\mu} \frac{dt/dy}{dw_x/dy} = S \frac{\lambda}{\mu} \frac{(t_r - t_c)}{(w_r - w_c)} = S \frac{\lambda}{\mu} \frac{(t_r - t_c)}{w_r}, \quad (2.40)$$

$$q = Sc_p \frac{t_0 - t_r}{w_0 - w_r}. \quad (2.41)$$

В формуле (2.40)  $w_c = 0$  согласно гипотезе прилипания.

Выразим разности температур из (2.40) и (2.41) и сложим левые и правые части найденных выражений

$$\left. \begin{aligned} t_r - t_c &= \frac{q w_r \mu}{S \lambda} \\ t_0 - t_r &= \frac{q w_0}{Sc_p} \left( 1 - \frac{w_r}{w_0} \right) \end{aligned} \right\} +$$

получим

$$t_0 - t_c = \frac{qw_0}{Sc_p} \left[ \frac{w_r}{w_0} \left( \frac{\mu c_p}{\lambda} \right) + 1 - \frac{w_r}{w_0} \right] = \frac{qw_0}{Sc_p} \left[ \frac{w_r}{w_0} (Pr-1) + 1 \right].$$

Из этого выражения выразим плотность теплового потока

$$q = \frac{Sc_p}{w_0} (t_0 - t_c) \frac{1}{1 + \frac{w_r}{w_0} (Pr-1)}. \quad (2.42)$$

Обозначим  $\frac{1}{1 + \frac{w_r}{w_0} (Pr-1)} = E$  и подставим в (2.42), получим форму-

лу связи коэффициента теплоотдачи с касательными напряжениями при турбулентном течении жидкости

$$\frac{q}{t_0 - t_c} = \alpha = \frac{Sc_p}{w_0} E. \quad (2.43)$$

Известно [6], что  $S = \frac{\xi \rho w_0^2}{2}$ , где  $\xi$  — коэффициент сопротивления.

При турбулентном режиме течения жидкости  $\xi = 0,0576 Re_x^{-0,2}$ . Подставляя значения коэффициента сопротивления  $\xi$  в (2.43), а (2.43) — в (2.42), имеем  $\alpha = 0,0288 \rho w_0 c_p E Re_x^{-0,2}$ . Умножим левую и правую части

этого равенства на  $\frac{x}{\lambda}$  и, учитывая, что  $\frac{c_p \rho}{\lambda} = \frac{1}{a}$ , получим

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = 0,0288 \frac{w_0 x}{a} E Re_x^{-0,2}. \quad (2.44)$$

Умножим и поделим правую часть (2.44) на  $v$ , тогда

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = 0,0288 \frac{w_0 x}{v} \frac{v}{a} E Re_x^{-0,2} = 0,0288 Re_x Pr E Re_x^{-0,2}, \text{ или}$$

$$Nu_x = 0,0288 Re_x^{0,8} Pr E. \quad (2.45)$$

При  $Pr = 1$  и  $E = 1$

$$Nu_x = 0,0288 Re_x^{0,8}. \quad (2.46)$$

Из формулы (2.46) следует, что локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha = Cx^{-0,2}$ . Найдем средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l Cx^{-0,2} dx = 1,25 \cdot Cl^{-0,2}, \text{ или } \bar{\alpha} = 1,25\alpha.$$

Формулу (2.46) можно использовать только в случае, когда плоская поверхность обтекается газом, так как в этом случае  $Pr \approx 1$ . Для расчета коэффициента теплоотдачи для капельных жидкостей ( $Pr > 1$ ) формула (2.46) непригодна. Это связано с тем, что при ее выводе мы полагали, что теплота в ламинарном подслое передается только теплопроводностью, а в турбулентном слое — конвекцией, т. е. на стыке этих слоев механизм переноса теплоты резко изменяется. В действительности переход происходит плавно.

Немецкий ученый Карман усовершенствовал модель турбулентного пограничного слоя, введя буферный подслой между ламинарным подслоем и турбулентным слоем. В буферном слое перенос теплоты происходит как теплопроводностью, так и турбулентными пульсациями.

**Расчетные формулы.** С учетом экспериментальных данных формулы для расчета соответственно локального и среднего по длине коэффициентов теплоотдачи при турбулентном режиме течения жидкости вдоль плоской поверхности имеют вид

$$Nu_{ж,x} = 0,029 Re_{ж,x}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.47)$$

$$Nu_{ж,x} = \frac{\alpha x}{\lambda} \rightarrow \alpha = \frac{Nu_{ж,x} \lambda}{x}.$$

$$\bar{Nu}_{ж,l} = 0,037 Re_{ж,l}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.48)$$

$$\bar{Nu}_{ж,l} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu}_{ж,l} \lambda}{l}.$$

В качестве определяющего геометрического размера в формуле (2.47) берется  $x$ , а в (2.48) —  $l$ , определяющей температурой является  $t_{ж}$ .

## 2.6. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости внутри труб

Характер течения жидкости в трубах сложнее, чем при обтекании плоской поверхности, так как поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. В результате, начиная с некоторого расстояния от входа, жидкость по всему поперечному сечению трубы испытывает тормозящее действие сил вязкости. Изменение температуры жидкости происходит как по сечению, так и по длине трубы. Все это сказывается на величине и характере изменения локального коэффициента теплоотдачи.

Движение жидкости в трубах и каналах может быть ламинарным и турбулентным. Режим движения полностью определяется безразмерным числом  $Re = \frac{wd}{\nu}$ , где  $d$  — внутренний диаметр трубы.

Экспериментальным путем установлено, что при  $Re < 2300$  режим движения жидкости ламинарный, при  $Re \geq 10^4$  — турбулентный. Диапазон изменения  $Re$  от 2300 до  $10^4$  соответствует переходному режиму течения.

Рассмотрим установившееся движение жидкости в прямой круглой трубе при ламинарном изотермическом режиме (рис. 2.7).

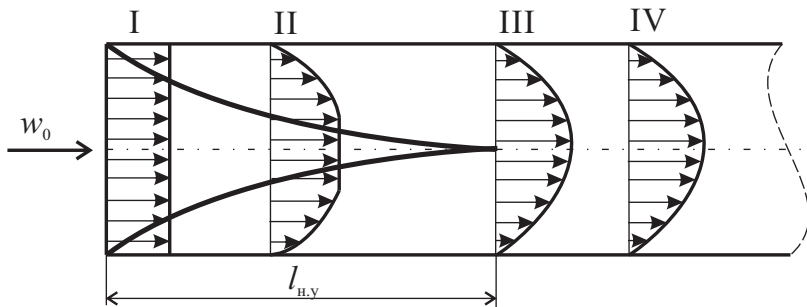


Рис. 2.7. Картина образования гидродинамического пограничного слоя и изменения профиля скорости жидкости по сечению трубы при ламинарном режиме

Если вход в трубу плавный и жидкость втекает из большого объема, то в начальном сечении I распределение скоростей будет равномерным. При движении жидкости в трубе около поверхности обра-

зуются кольцевой гидродинамический пограничный слой, толщина которого увеличивается, что приводит к изменению профиля скоростей (сечение II). Нарастание толщины пограничного слоя приводит к тому, что на некотором расстоянии  $l_{н.у}$  все сечение трубы будет занято пограничным слоем. Величину  $l_{н.у}$  называют начальным участком гидродинамической стабилизации, так как после него устанавливается стабильное распределение скоростей по сечению, не изменяющееся по длине трубы (сечения III и IV) и подчиняющееся параболическому закону [8]:

$$w = w_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \text{ или } W = 2(1 - R^2),$$

где  $R = \frac{r}{r_0}$  — безразмерный радиус,  $W = \frac{w}{w_{\max}}$  — безразмерная скорость,  $w_{\max} = 2\bar{w}$  — максимальная скорость на оси в 2 раза превышает среднюю по сечению скорость,  $r_0$  — радиус трубы;  $r$  — текущий радиус.

Аналогичный начальный участок стабилизации наблюдается и при турбулентном режиме (рис. 2.8). Только в этом случае гидродинамический пограничный слой — турбулентный и занимает все сечение трубы, кроме тонкого подслоя жидкости вблизи стенок.

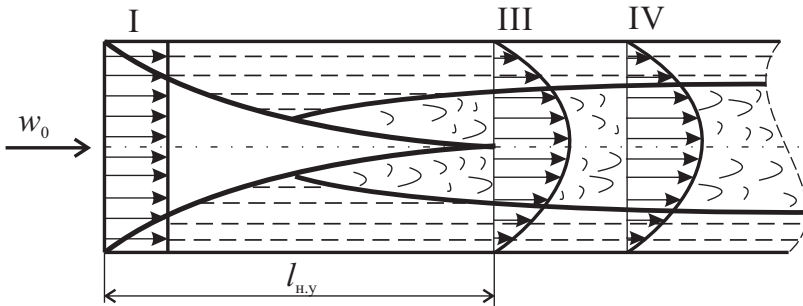


Рис. 2.8. Картина образования гидродинамического пограничного слоя и изменения профиля скорости жидкости по сечению трубы при турбулентном режиме

Распределение скоростей по сечению трубы имеет вид усеченной параболы с резким изменением скорости в ламинарном подслое и плавным в турбулентном ядре потока (сечения III и IV). При этом отношение средней по сечению скорости  $\bar{w}$  к максимальной (на оси)  $\bar{w}/w_{\max} = 0,8 - 0,9$ .

В случае неизотермического течения, кроме гидродинамического, возникает начальный участок тепловой стабилизации  $l_{н.у}$  (рис. 2.9), после которого все сечение трубы будет занято тепловым пограничным слоем.

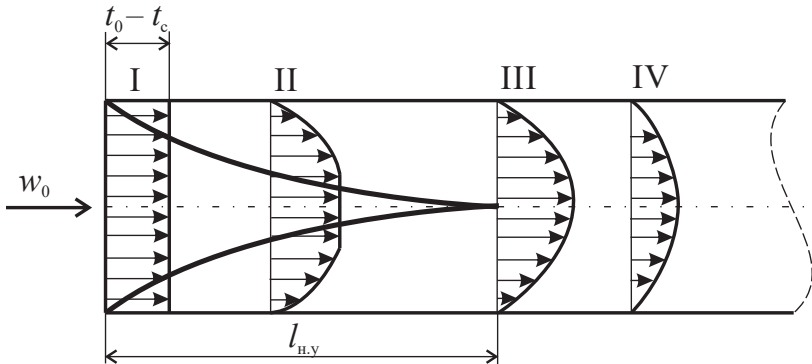


Рис. 2.9. Картина образования теплового пограничного слоя и изменения профиля температуры жидкости по сечению трубы

Однако и после участка тепловой стабилизации распределение температуры продолжает изменяться.

Изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы показано на рис. 2.10 для ламинарного (*а*) и турбулентного (*б*) режимов. На участке тепловой стабилизации при ламинарном течении жидкости величина коэффициента теплоотдачи уменьшается, с увеличением турбулизации потока (рис. 2.10, *б*) величина коэффициента теплоотдачи возрастает.

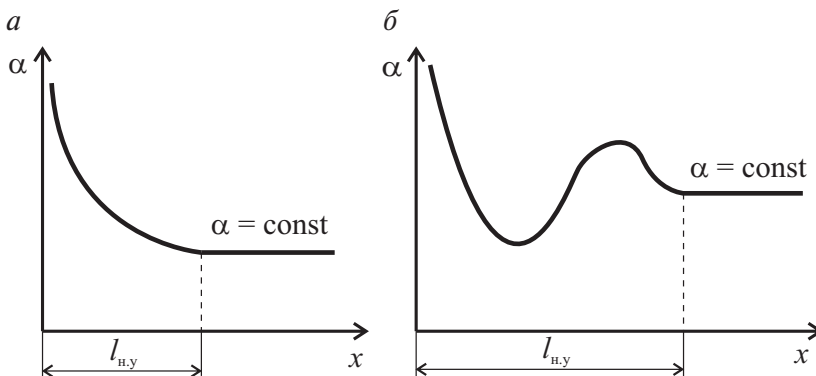


Рис. 2.10. Изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы. Режимы: *а* — ламинарный; *б* — турбулентный

За участком тепловой стабилизации коэффициент теплоотдачи не изменяется.

Если течение жидкости в трубе неізотермическое (температура жидкости по сечению трубы неодинаковая), то при ламинарном режиме могут иметь место два подрежима неізотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Подрезим определяется по величине произведения критериев Грасгофа и Прандтля.

Вязкостный подрезим ( $Gr \cdot Pr < 8 \cdot 10^5$ ) наблюдается при преобладании сил вязкости над подъемными силами, т. е. он имеет место при течении вязких жидкостей при отсутствии влияния естественной конвекции.

Если  $Gr \cdot Pr \geq 8 \cdot 10^5$ , то режим течения жидкости — вязкостно-гравитационный. При этом помимо изменения вязкости распределение скоростей в значительной мере зависит от интенсивности и направления токов естественной конвекции, обусловленных разностью плотностей менее и более нагретых элементарных объемов жидкости.

В случае неізотермического течения нельзя строго выделить участок стабилизации потока. При турбулентном режиме течения жидкости влияние неізотермичности на профиль скорости по сечению трубы невелико.

### 2.6.1. Теплоотдача при ламинарном режиме ( $Re < 2300$ ) движения жидкости в трубе

Аналитический метод расчета теплоотдачи при стабилизированном течении жидкости в трубе основан на решении, носящем название интеграла Лайона [6]:

$$\frac{1}{Nu} = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R W R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{\lambda_t}{\lambda} \right) R} dR, \quad (2.49)$$

где  $\lambda_t$  — турбулентный аналог коэффициента теплопроводности, так как в турбулентном потоке теплота передается не только путем турбулентных пульсаций, но и теплопроводностью. Рассчитать коэффициент теплоотдачи по этому выражению можно, если известно распре-

деление скоростей по сечению трубы. Как было показано выше, при ламинарном изотермическом режиме, когда физические параметры жидкости неизменны (температурные напоры бесконечно малы), имеет место параболический закон распределения скоростей. Однако на практике режимы неизотермические и распределение скоростей по сечению неизвестно, поэтому воспользоваться аналитическим решением крайне сложно, а если для каких-то частных случаев и можно, то расхождение полученного результата с опытными данными может быть очень велико. На практике расчеты теплоотдачи ведут с помощью эмпирических формул.

**Расчетные формулы.** При вязкостном режиме силы внутреннего трения велики по сравнению с подъемными силами, поэтому влиянием свободной конвекции можно пренебречь. Для длинных труб, когда

$$\frac{l}{d} \geq 0,067 \operatorname{Re}_{ж,d} \operatorname{Pr}_{ж}^{5/6}, \quad (2.50)$$

$$\bar{\operatorname{Nu}}_{ж,d} = 4 \left( \frac{\operatorname{Pr}_{ж}}{\operatorname{Pr}_c} \right)^{0,25}. \quad (2.51)$$

Для коротких труб, когда соотношение (2.50) не выполняется, расчет теплоотдачи ведется по формуле

$$\bar{\operatorname{Nu}}_{ж,d} = 1,4 \left( \operatorname{Re}_{ж,d} \cdot \frac{d}{l} \right)^{0,4} \operatorname{Pr}_{ж}^{0,33} \left( \frac{\operatorname{Pr}_{ж}}{\operatorname{Pr}_c} \right)^{0,25}. \quad (2.52)$$

При вязкостно-гравитационном режиме, когда  $(\operatorname{Gr} \operatorname{Pr}) \geq 8 \cdot 10^5$ , теплоотдача рассчитывается по формуле

$$\bar{\operatorname{Nu}}_{ж,d} = 0,15 \operatorname{Re}_{ж,d}^{0,33} \operatorname{Pr}_{ж}^{0,33} (\operatorname{Gr}_{ж,d} \operatorname{Pr}_{ж})^{0,1} \left( \frac{\operatorname{Pr}_{ж}}{\operatorname{Pr}_c} \right)^{0,25} \varepsilon_l, \quad (2.53)$$

где  $(\operatorname{Gr}_{ж,d} \operatorname{Pr}_{ж})^{0,1}$  учитывает влияние свободной конвекции, а  $\varepsilon_l$  является поправкой на участок тепловой стабилизации, существенной для коротких труб. При  $\frac{l}{d} \geq 50$   $\varepsilon_l = 1$ , в противном случае  $\varepsilon_l = f\left(\frac{l}{d}\right)$  и определяется по эмпирическим формулам. Для ламинарного режима значения  $\varepsilon_l = f\left(\frac{l}{d}\right)$  приведены ниже.



$l/d$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$\varepsilon_i$	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,00

В формулах (2.51)...(2.53) в качестве определяющего размера принят внутренний диаметр трубы, а определяющая температура  $\bar{t}_ж = (t'_ж + t''_ж)/2$ , где  $t'_ж$ ,  $t''_ж$  — температуры жидкости на входе и выходе из трубы соответственно.

Рассчитав по формулам (2.51)...(2.53) безразмерное число Нуссельта, находят средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu} \lambda}{d}.$$

### 2.6.2. Теплоотдача при турбулентном режиме ( $Re \geq 10^4$ ) движения жидкости в трубе

Аналитически расчет теплоотдачи ведется с помощью выражения (2.43), полученного с использованием аналогии Рейнольдса. Касательные напряжения, возникающие при течении жидкости в трубе, можно определить по формуле [6]:

$$S = \frac{1}{8} \xi \rho w_0^2, \quad (2.54)$$

где  $\xi$  — коэффициент гидравлического сопротивления при изотермическом стабилизированном турбулентном течении в гладкой трубе, определяющийся по формуле

$$\xi = 0,184 Re^{-0,2}. \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) в (2.54), а полученное выражение — в (2.42), запишем результат

$$\alpha = 0,023 \frac{c_p \rho w^2}{\lambda} Re^{-0,2} E. \quad (2.56)$$

Умножим левую и правую части (2.56) на  $d/\lambda$  и, учитывая, что  $\frac{c_p \rho}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$ , запишем  $\frac{\alpha d}{\lambda} = 0,023 \frac{c_p \rho w d}{\lambda} Re^{-0,2} \cdot \frac{v}{v} E = 0,023 \frac{w d}{v} \frac{v}{a} Re^{-0,2} E$  или

$$Nu_d = 0,023 Re_d^{0,8} Pr E. \quad (2.57)$$

Формулой можно пользоваться только для газов, так как для них  $E = 1$ .

**Расчетные формулы.** М. А. Михеев [4] обобщил большое количество опытных данных, в результате чего для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при турбулентном движении жидкости (кроме жидкого металла) в прямых гладких трубах была предложена формула

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,023 Re_{ж,d}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_l, \quad (2.58)$$

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\overline{Nu} \lambda}{d}.$$

Здесь за определяющую температуру принята средняя температура жидкости  $\bar{t}_{ж} = (t'_{ж} + t''_{ж})/2$ , а за определяющий размер — внутренний диаметр трубы. Коэффициент  $\varepsilon_l$  учитывает влияние начального участка тепловой стабилизации. Если  $(l/d) \geq 15$ , то  $\varepsilon_l = 1$ . При  $(l/d) < 15$  поправочный коэффициент  $\varepsilon_l$  можно определить по формуле

$$\varepsilon_l = 1,38(l/d)^{-0,12}. \quad (2.59)$$

### 2.6.3. Теплоотдача при переходном режиме движения жидкости в трубе

Для оценки теплоотдачи при переходном режиме ( $2300 < Re < 10^4$ ) можно воспользоваться формулой [3]:

$$\overline{Nu}_{ж,d} = A Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.60)$$

где  $A = f(Re_{ж,d})$ .

Для инженерных расчетов можно приближенно принять следующие значения  $A$  в зависимости от величины числа Рейнольдса: при

$2300 < Re_{ж,d} < 3000$ ,  $A = 6$ ;

$3000 \leq Re_{ж,d} < 4000$ ,  $A = 10$ ;

$4000 \leq Re_{ж,d} < 5000$ ,  $A = 20$ ;

$5000 \leq Re_{ж,d} < 6000$ ,  $A = 25$ ;

$6000 \leq Re_{ж,d} < 10^4$ ,  $A = 30$ .

### 2.6.4. Теплоотдача при вынужденном течении жидкости в каналах

Под каналом понимают трубу не круглого сечения или кожух, в котором закреплен пучок труб (рис. 2.11), а в межтрубном пространстве движется жидкость. Занимаемое этой жидкостью пространство называется каналом. Это имеет место в кожухотрубных теплообменных аппаратах. Движение жидкости в каналах, так же как и в трубах, может быть ламинарным и турбулентным.

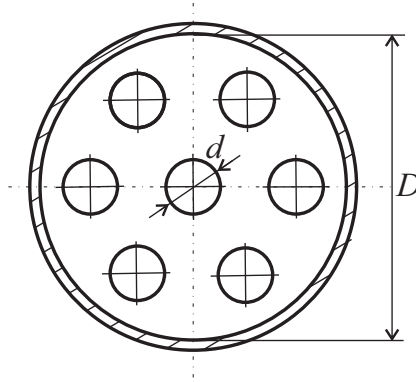


Рис. 2.11. Схема кожухотрубного теплообменного аппарата

Режим движения определяется по безразмерному числу  $Re = \frac{w d_э}{\nu}$ , где  $d_э$  — эквивалентный или гидравлический диаметр. Эквивалентный диаметр определяется выражением [7]:

$$d_э = \frac{4f}{\Pi}, \quad (2.61)$$

где  $f$  — поперечное сечение канала;  $\Pi$  — его смоченный периметр.

Определим эквивалентный диаметр для жидкости, движущейся в межтрубном пространстве кожухотрубного теплообменного аппарата (рис. 2.11):

$$d_э = \frac{4f}{\Pi} = \frac{4 \left( \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} Z \right)}{\pi D + \pi d Z} = \frac{(\pi D^2 - \pi d^2 Z)}{\pi D + \pi d Z},$$

где  $D$  — внутренний диаметр кожуха;  $d$  — наружный диаметр труб, расположенных в кожухе;  $Z$  — количество труб в кожухе.

Разновидностью кожухотрубных теплообменников с круглыми трубами являются пластинчатые (ламельные) теплообменники, у которых вместо круглых труб используются плоские трубы (каналы), сваренные из узких металлических пластин (ламель от латинского слова *lamella* — пластинка). Поверхность теплообмена таких плоских труб образуется из отдельных пластин, расположенных параллельно друг другу, поэтому каналы для рабочей среды имеют щелевидную форму (рис. 2.12, а).

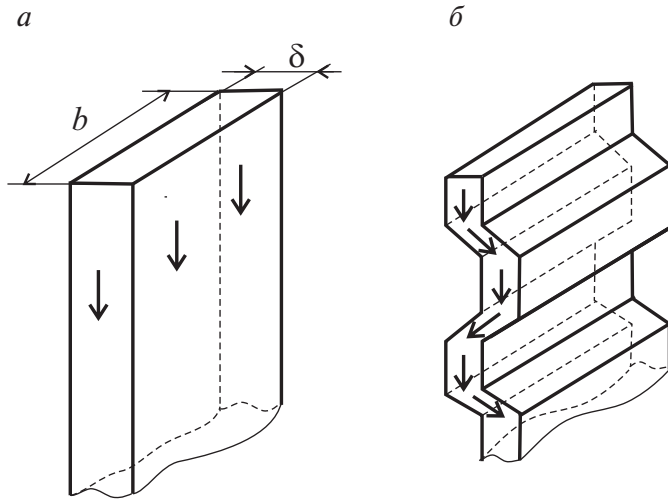


Рис. 2.12. Каналы щелевидной формы образованные:

а — из гладких пластин; б — из гофрированных пластин (гофры трапециевидальной формы)

Эквивалентный диаметр такого канала составляет  $d_э = \frac{4f}{\Pi} = \frac{4(\delta \cdot b)}{2\delta + 2b}$ .

В современных теплообменниках (в зависимости от типа) толщина канала ( $\delta$ ) изменяется примерно от 3 до 10 мм, а ширина пластин  $b$  — от 150 мм до 750. Так как толщина канала ( $\delta$ ) намного меньше его ширины ( $b$ ), то  $d_э \approx 2\delta$ .

Форма пластин и профили их поверхности в пластинчатых теплообменниках очень разнообразны [8] и это делается не только с целью интенсификации процесса теплоотдачи, но и для создания достаточной жесткости пластин, подвергающихся значительным механическим нагрузкам от давления рабочей среды внутри канала. Поверхности пластин плоских каналов чаще всего не гладкие, а выштампованны продольными желобками и шаровыми сегментами, которые в рабочем со-

стоянии служат опорой смежных пластин и турбулизаторами потока рабочей среды. Однако степень турбулизации в таких каналах значительно меньше, чем в каналах из гофрированных пластин (рис. 2.12, б), которые имеют повышенную жесткость по сравнению с плоскими пластинами, а извилистый профиль гофр увеличивает поверхность теплообмена и создает значительную турбулентность движущейся рабочей среды в проточной части канала при сравнительно малых скоростях потока. Основной особенностью течения жидкости в щелевидных каналах с гофрированными стенками является периодическая дестабилизация потока, обусловленная наличием частых поворотов, расстояние между которыми обычно не превышает необходимой длины участка гидродинамической стабилизации потока жидкости.

Для каждой конкретной формы поверхности пластин, образующих щелевидный канал, существует некоторый диапазон критических значений числа Рейнольдса, при которых происходит переход от одного режима к другому. На критическое число Рейнольдса существенно влияет форма поверхности стенок канала, а также источники искусственной турбулизации потока.

Как и при движении жидкости в круглой трубе, в канале с гладкими плоскими стенками в условиях стабилизированного потока область переходного режима лежит в пределах  $2300 < Re < 10000$ . В каналах с гофрированными стенками эта область, как показывает опыт [9], находится значительно ниже и переход к турбулентному режиму происходит уже при  $Re = 50-500$  в зависимости от формы поверхности пластин, создающих эффективную искусственную турбулизацию потока жидкости при ее движении в извилистых щелевидных каналах.

В исследовании процесса теплоотдачи при движении жидкости в каналах основное место занимает эксперимент с получением расчетных уравнений в форме связи между критериями подобия ( $Nu = f(Re, Pr)$ ).

Согласно исследованиям [8] при вынужденном движении жидкости в каналах с плоскими гладкими стенками формулы для расчета среднего коэффициента теплоотдачи остаются такими же, как и для труб.

Коэффициент теплоотдачи при движении жидкости в каналах, образованных гофрированными пластинами, рассчитывается по формуле

$$\overline{Nu}_{ж, d_s} = A Re_{ж, d_s}^n Pr_{ж}^m \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.62)$$

где коэффициент  $A$  зависит от площади поверхности пластин и от режима движения жидкости.

Значение коэффициента  $A$ :

Площадь поверхности пластины, $\text{м}^2$	0,2	0,3	0,5	0,6	1,3;
Турбулентный режим	0,065	0,1	0,135	0,135	0,135;
Ламинарный режим	0,46	0,6	0,6	0,6	0,6.

Показатели степени  $n$  и  $m$  выбираются в зависимости от режима течения:

- при турбулентном режиме ( $50 < \text{Re}$ )  $n = 0,73$   $m = 0,43$ ;
- при ламинарном режиме ( $50 \geq \text{Re}$ )  $n = 0,33$   $m = 0,33$ .

В качестве определяющего геометрического размера берется  $d_3 \approx 2\delta$ , за определяющую температуру принимается средняя температура жидкости.

**Теплоотдача при течении жидкости в кольцевом канале.** При турбулентном течении жидкости в канале кольцевого поперечного сечения (достаточно распространенный теплообменный аппарат, который называется *труба в трубе*, рис. 2.13).

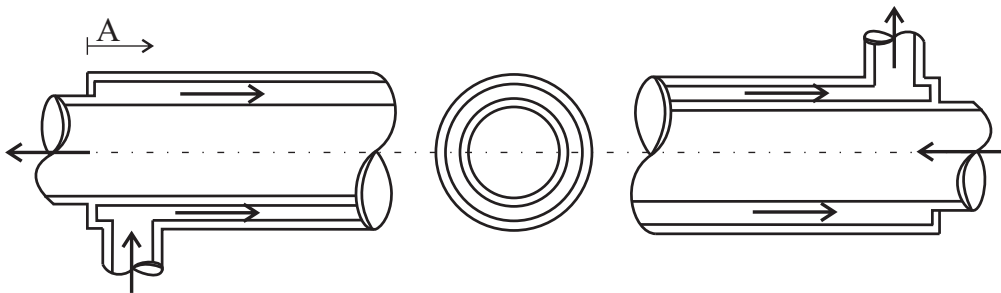


Рис. 2.13. Схема теплообменного аппарата *труба в трубе*

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи рекомендуется [6] формула

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{ж}, d_3} = 0,017 \text{Re}_{\text{ж}, d_3}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,4} \left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_{\text{с}}} \right)^{0,25} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^{0,18}, \quad (2.63)$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d_3}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu} \lambda}{d_3}.$$

Здесь определяющей температурой является средняя температура жидкости в кольцевом канале, определяющим размером —  $d_3 = d_2 - d_1$ , где  $d_1$  — внутренний, а  $d_2$  — внешний диаметр кольцевого канала.

## 2.7. Теплоотдача при вынужденном поперечном обтекании одиночной трубы и пучка труб

В инженерной практике достаточно часто приходится рассчитывать теплоотдачу от поперечно обтекаемых труб, так как трубы являются элементами многих теплообменных аппаратов. Труба может быть одна, расположенная в поперечно обтекаемом ее потоке жидкости, или их может быть сразу несколько, объединенных в пучок. Рассмотрим процесс обтекания и теплоотдачи как одиночных круглых труб, так и их пучков.

### 2.7.1. Теплоотдача при поперечном обтекании одиночной трубы

Пусть труба находится в потоке жидкости, направление которого перпендикулярно ее оси (рис. 2.14).

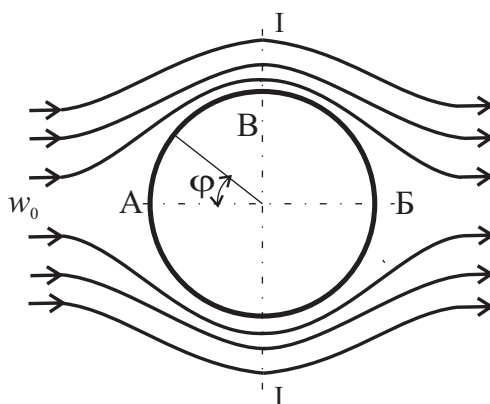


Рис. 2.14. Картина обтекания трубы ( $Re < 5$ )

Такое обтекание называется поперечным. Если через ось трубы провести плоскость, перпендикулярную направлению потока, то она разобьет поверхность трубы на лобовую, обращенную навстречу потоку ( $A$  — лобовая точка), и противоположную кормовую ( $B$  — кормовая точка). Положение точки на поверхности (например, точка  $B$ ) удобно характеризовать углом  $\varphi$ , который называется угловым расстоянием. Характер обтекания трубы полностью определяется безразмерным числом  $Re = \frac{w_0 d}{\nu}$ , где  $d$  — внешний диаметр трубы.

Экспериментально установлено, что при  $Re < 5$  труба является удобообтекаемым телом (рис. 2.14). При этом на лобовой поверхности с ростом  $\varphi$  скорость в пограничном слое возрастает, достигает максимума при  $\varphi = 90^\circ$ , а затем уменьшается в кормовой части. Давление же наоборот: вначале уменьшается, достигает минимума, а потом возрастает.

Увеличение давления в кормовой части происходит за счет уменьшения кинетической энергии потока вблизи поверхности, что приводит к торможению жидкости и последующему появлению встречного движения, которое наблюдается уже при  $Re > 5$  (рис. 2.15).

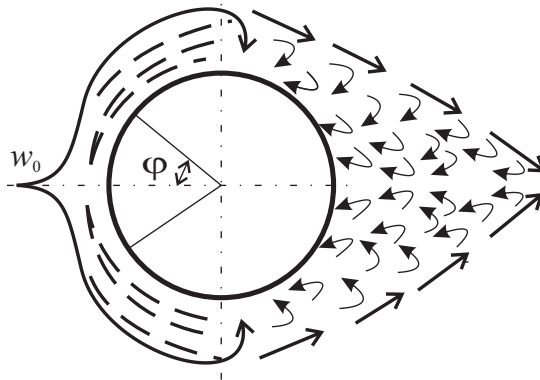


Рис. 2.15. Картина обтекания трубы ( $Re > 5$ )

Встречное течение оттесняет пограничный слой от поверхности тела, в результате чего происходит отрыв потока и образование вихрей. При этом возможны два случая:

а) если  $5 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ , то ламинарный пограничный слой (рис. 2.15) отрывается при угловых расстояниях порядка  $82$ – $84^\circ$ . Следовательно,



лобовая поверхность омывается ламинарным потоком, а кормовая — вихрями;

б) если  $Re > 2 \cdot 10^5$ , то ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный, который отрывается от поверхности при  $\varphi = 120 - 140^\circ$ .

Особенности обтекания трубы определяют характер изменения коэффициентов теплоотдачи по ее окружности. На рис. 2.16 приведены зависимости  $\alpha_\varphi / \bar{\alpha} = f(\varphi)$  [1], где  $\alpha_\varphi, \bar{\alpha}$  — коэффициенты теплоотдачи в данной точке и средний по окружности при отрыве ламинарного (а) и турбулентного (б) пограничных слоев. Теплоотдача в области I уменьшается за счет роста толщины пограничного слоя; область II соответствует кормовой части трубы, омываемой вихрями, вследствие чего процесс теплоотдачи несколько интенсифицируется. Области I' и I'' имеют место при отрыве турбулентного пограничного слоя (рис. 2.16, б). Изменения интенсивности теплоотдачи связаны с переходом ламинарного режима движения в турбулентный и увеличением толщины, а значит, и термического сопротивления турбулентного пограничного слоя.

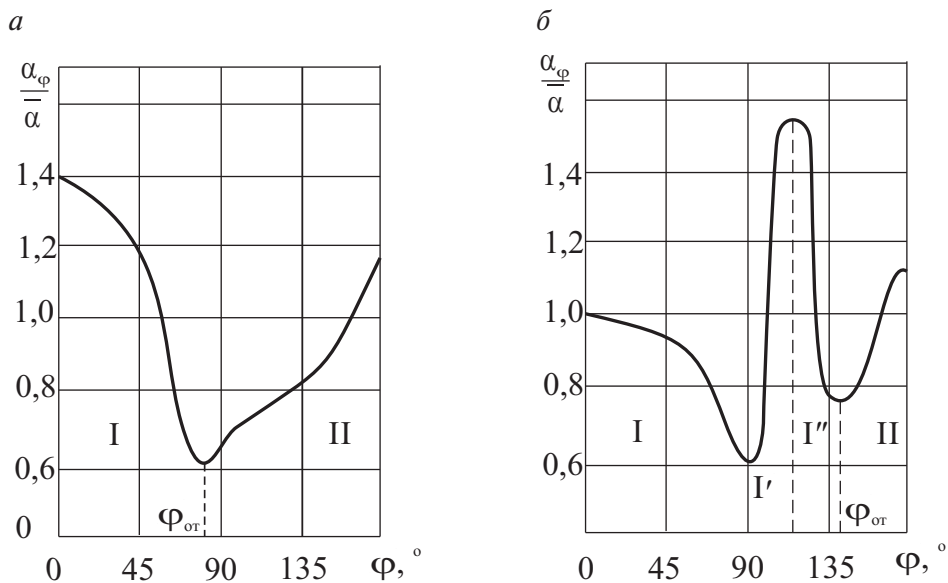


Рис. 2.16. Изменения интенсивности процесса теплоотдачи по периметру трубы

**Расчетные формулы.** Для расчета средних по окружности коэффициентов теплоотдачи при поперечном обтекании потоком одиночных труб пользуются следующими формулами:

- при  $5 < Re_{ж,d} < 10^3$

$$\bar{Nu}_{ж,d} = 0,5 Re_{ж,d}^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_{\psi};$$

- при  $10^3 \leq Re_{ж,d} < 2 \cdot 10^5$

$$\bar{Nu}_{ж,d} = 0,25 Re_{ж,d}^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_{\psi};$$

- при  $2 \cdot 10^5 \leq Re_{ж,d} < 10^7$

$$\bar{Nu}_{ж,d} = 0,023 Re_{ж,d}^{0,8} Pr_{ж}^{0,4} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_{\psi};$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu} \lambda}{d}. \quad (2.64)$$

Безразмерное число  $Re_{ж,d}$  рассчитывается по скорости набегающего потока либо по скорости в самом узком сечении, если труба расположена в канале.  $\varepsilon_{\psi}$  — поправка на угол атаки (угол между направлением потока и осью трубы). Если угол атаки  $\psi = 90^\circ$ , то  $\varepsilon_{\psi} = 1$ . При  $\psi = 30 \dots 90^\circ$  можно использовать приближенную зависимость

$$\varepsilon_{\psi} = 1 - 0,54 \cdot \cos^2 \psi. \quad (2.65)$$

### 2.7.2. Теплоотдача при поперечном обтекании пучка гладких труб

Многие теплообменные аппараты представляют собой пучки поперечно омываемых труб. При этом различают два основных типа пучков труб: коридорный (а) и шахматный (б) (рис. 2.17).

Каждый из пучков характеризуется внешним диаметром труб  $d$ , поперечным шагом  $S_1$ , продольным шагом  $S_2$  и числом рядов труб по ходу движения жидкости  $Z$ .

Режим движения жидкости в пучке полностью определяется безразмерным числом  $Re_{ж,d} = \frac{w_{узк} d}{\nu}$ , где  $w_{узк}$  — скорость потока, отнесенная к самому узкому сечению. В зависимости от величины  $Re_{ж,d}$  различают:

а) ламинарный режим, когда  $Re < 10^3$ . В этом случае при небольших значениях  $Re$  может наблюдаться плавное, безотрывное обтекание труб пучка;

б) смешанный режим, когда  $Re = 10^3 \dots 10^5$ . Здесь наблюдается смешанное течение жидкости: турбулентное в пространстве между трубами и ламинарное на лобовой поверхности труб;

в) турбулентный режим ( $Re > 10^5$ ), когда вся поверхность труб омывается турбулентным пограничным слоем.

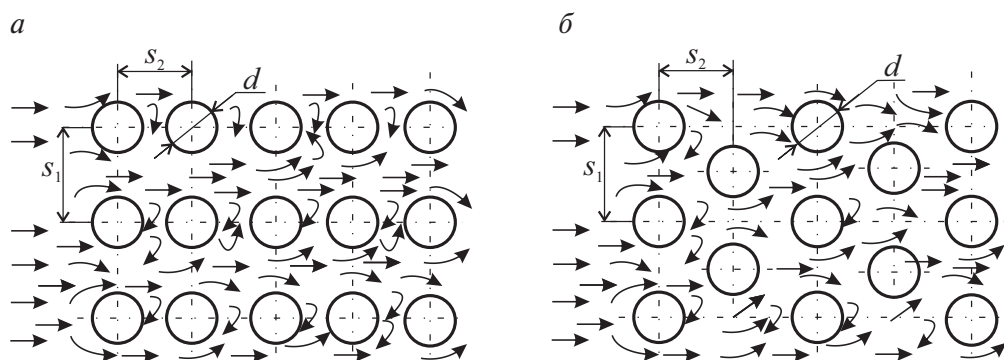


Рис. 2.17. Схема коридорного (а) и шахматного (б) пучка труб

Чаще всего на практике встречается смешанный режим. В этом случае первый ряд труб обоих пучков омывается так же, как и одиночная труба. Характер обтекания остальных труб в значительной мере зависит от типа пучка. В коридорном пучке между трубами образуются застойные зоны со слабой циркуляцией жидкости, поэтому лобовая и кормовая части этих труб омываются с меньшей интенсивностью: поток в основном проходит в продольных зазорах между трубами. В шахматном пучке характер обтекания труб второго и последующего рядов качественно мало отличается от обтекания труб первого ряда.

Отмеченные особенности обтекания труб, расположенных в пучках, отражаются на теплоотдаче. Для труб первого ряда обоих пучков и последующих рядов шахматного пучка максимум коэффициента  $\alpha_\phi$  наблюдается в лобовой точке А. Для глубинных рядов коридорного пучка, вследствие наличия застойных зон, максимум  $\alpha_\phi$  смещается на расстояние  $\phi \approx 50^\circ$ . Исследование теплоотдачи показало [4], что с ростом номера ряда средний коэффициент теплоотдачи увеличивается. Однако, начиная с третьего ряда, интенсивность теплоотдачи остается практически постоянной, так как не изменяется структура потока.

**Расчетные формулы.** В результате обработки опытных данных для определения средних коэффициентов теплоотдачи ( $\bar{\alpha}_{3p}$ ) для труб, начиная с третьего ряда, при смешанном режиме были получены следующие формулы [1]:

- при коридорном расположении труб в пучке

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,26 Re_{ж,d}^{0,65} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_s \varepsilon_\psi, \quad (2.66)$$

где  $\varepsilon_s$  — поправочный коэффициент, учитывающий густоту расположения труб в пучке,  $\varepsilon_s = (S_2/d)^{-0,15}$ ;

- при шахматном расположении труб в пучке

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,41 Re_{ж,d}^{0,6} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_s \varepsilon_\psi, \quad (2.67)$$

где при  $\left( \frac{S_1}{S_2} \right) < 2$   $\varepsilon_s = \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{6}}$ , а при  $\left( \frac{S_1}{S_2} \right) \geq 2$   $\varepsilon_s = 1,12$ .

В формулах (2.66) и (2.67) в качестве определяющих температуры, скорости и размера приняты: средняя температура потока; скорость потока в узком сечении; наружный диаметр труб.  $\varepsilon_\psi$  — поправка на угол атаки, которая определяется по формуле (2.65). Из формул (2.66) и (2.67) устанавливается коэффициент теплоотдачи для третьего и последующих рядов труб  $\bar{\alpha}_{3p} = \frac{\overline{Nu} \lambda}{d}$ . Средний коэффициент теплоотдачи для всего пучка в целом определяется по формуле

$$\bar{\alpha}_{пуч} = \frac{\bar{\alpha}_{1p} + \bar{\alpha}_{2p} + \bar{\alpha}_{3p}(Z-2)}{Z}, \quad (2.68)$$

где  $Z$  — количество рядов труб по ходу потока жидкости. Коэффициенты теплоотдачи для труб первого  $\bar{\alpha}_{1p}$  и второго  $\bar{\alpha}_{2p}$  рядов находятся по следующим формулам:

- для коридорного пучка

$$\bar{\alpha}_{1p} = 0,6 \bar{\alpha}_{3p}, \quad \bar{\alpha}_{2p} = 0,9 \bar{\alpha}_{3p};$$

- для шахматного пучка

$$\bar{\alpha}_{1p} = 0,6 \bar{\alpha}_{3p}, \quad \bar{\alpha}_{2p} = 0,7 \bar{\alpha}_{3p}.$$

### 2.7.3. Теплоотдача при поперечном обтекании оребренных труб

Как уже отмечалось в 1.4, в целях интенсификации процесса теплопередачи поверхность оребряется со стороны меньшего по величине коэффициента теплоотдачи. Если  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ , то увеличивать поверхность путем оребрения со стороны  $\alpha_1$  следует до тех пор, пока  $\alpha_1 \cdot F_1$  не достигнет значения  $\alpha_2 \cdot F_2$ . Дальнейшее увеличение поверхности  $F_1$  малоэффективно.

Поперечное расположение ребер относительно оси трубы (рис. 2.18) позволяет максимально развить поверхность теплообмена за счет уменьшения шага ребер ( $b$ ) и их толщины ( $\sigma$ ). Однако с ростом коэффициента оребрения увеличивается термическое сопротивление ребристой стенки, следовательно, уменьшается передача через нее теплоты и, как следствие, уменьшается коэффициент теплоотдачи (в расчете на единицу полной поверхности трубы). С этой точки зрения оребрение поверхности можно лишь условно рассматривать как способ интенсификации теплообмена, так как увеличение теплопередачи происходит за счет роста поверхности.

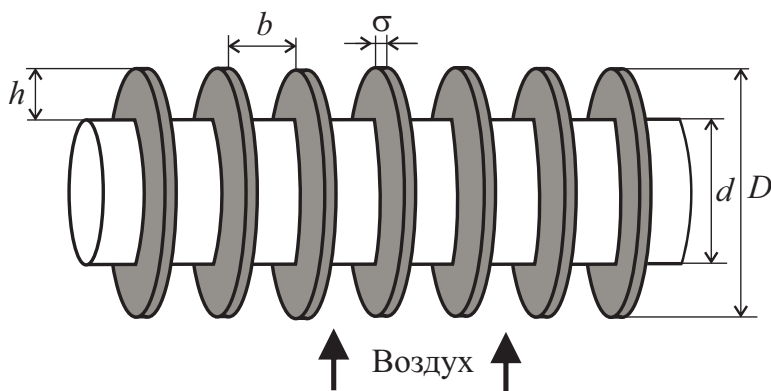


Рис. 2.18. Труба оребренная шайбовыми ребрами

Картина обтекания оребренных труб практически не отличается от таковой для гладких труб за исключением того, что кромки ребер дополнительно турбулизуют поток, поэтому режим течения среды в межтрубном пространстве турбулентный [9].

Обобщение результатов экспериментов, выполненных в работе [10], показало, что коэффициент теплоотдачи при поперечном об-

течении воздухом пучка оребренных труб зависит от высоты ( $h$ ) и толщины ( $\sigma$ ) ребра, а также расстояния между ребрами ( $b$ ) (рис. 2.18). Рекомендуется расстояние между ребрами выбирать не менее  $\frac{b}{d} = 0,06$ .

Оптимальные значения толщины и высоты ребра соответственно  $\frac{\sigma}{d} = 0,005$ ,  $\frac{D}{d} = 1,8$ . При этих размерах пучки имеют наименьшие габариты для передачи одного и того же количества теплоты при прочих равных условиях.

**Расчетные формулы для пучков труб с поперечным оребрением винтовыми и шайбовыми ребрами.** Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи от оребренной поверхности пучка труб при их поперечном обтекании газовым потоком (количество рядов труб по ходу потока  $Z \geq 4$ ) предложены [10] следующие формулы:

- при шахматном расположении оребренных труб в пучке

$$\bar{Nu}_{ж,d_3} = 0,36 \cdot \beta^{0,1} \cdot n^{-0,5} Re_{ж,d_3}^m Pr_{ж}^{0,33}; \quad (2.69)$$

- при коридорном расположении оребренных труб в пучке

$$\bar{Nu}_{ж,d_3} = 0,2 \cdot \beta^{0,1} \cdot n^{-0,7} Re_{ж,d_3}^m Pr_{ж}^{0,33}, \quad (2.70)$$

где  $\beta = \frac{S_1 - d}{S_2 - d}$  — коэффициент формы пучка (параметр, который характеризует геометрическое расположение труб в пучке);  $n$  — коэффициент оребрения;  $m = 0,6 \cdot n^{0,07}$ .

Формула (2.69) получена при изменении параметров:

$$d_3 = 12 - 178 \text{ мм}; \quad \beta = 0,46 - 2,2; \quad n = 1 - 21,2; \quad Re = 5000 - 370000.$$

Формула (2.70) получена при изменении параметров:

$$d_3 = 27 - 178 \text{ мм}; \quad \beta = 0,46 - 2,2; \quad n = 1 - 18,5; \quad Re = 10000 - 370000.$$

В формулах (2.69) и (2.70) в качестве определяющих температуры и скорости потока приняты средняя температура жидкости и ее скорость в узком сечении. За определяющий геометрический размер принят эквивалентный диаметр, определяемый выражением

$$d_3 = \frac{F_{мп}}{F_{рс}} d + \frac{F_{\Sigma p}}{F_{рс}} \sqrt{0,785(D^2 - d^2)}, \quad (2.71)$$

где  $F_{\text{рс}} = F_{\Sigma\text{р}} + F_{\text{мр}}$  — площадь поверхности ребристой стенки трубы;  $F_{\Sigma\text{р}}$  — площадь поверхности всех ребер на одной трубе;  $F_{\text{мр}}$  — межреберная площадь поверхности на одной трубе;  $d$  — наружный диаметр гладкой трубы;  $D$  — диаметр трубы по вершинам ребер.

Сравнивая по величине коэффициенты теплоотдачи для пучков оребренных и неоребренных труб, рассчитанные соответственно по формулам (2.67) — (2.70), следует заметить, что коэффициенты теплоотдачи оребренных труб, отнесенные к единице полной поверхности трубы, меньше таковых значений для гладких труб. Несмотря на это, теплообменники, выполненные из оребренных труб, более компактны и имеют меньшие объемы по сравнению с теплообменниками с гладкотрубными пучками при прочих равных условиях.

### **Примеры решения задач по теме «Теплоотдача при вынужденном движении жидкости»**

**Пример 1.** Пластина длиной  $l = 125$  мм омывается продольным потоком воздуха, температура которого  $t_{\text{ж}} = 20$  °С, а скорость  $w = 10$  м/с. Определить средний коэффициент теплоотдачи по длине пластины, если температура ее поверхности  $t_{\text{с}} = 50$  °С.

*Решение.* В данной задаче имеет место вынужденное движение жидкости (воздуха) вдоль плоской поверхности. Определим режим движения жидкости. Для этого рассчитаем значение критерия Рейнольдса:  $\text{Re} = \frac{wl}{\nu}$ . По определяющей температуре  $t_{\text{ж}}$  из П. 1, табл. П. 1.2

выписываем значения теплофизических параметров воздуха:  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К);  $\text{Pr}_{\text{ж}} = 0,703$ .  $\text{Pr}_{\text{с}}$  определяется из этой же таблицы по  $t_{\text{с}}$ :  $\text{Pr}_{\text{с}} = 0,698$ .

$$\text{Re}_{\text{ж}} = \frac{wl}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,125}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 83 \cdot 10^3.$$

При вынужденном движении жидкости вдоль плоской поверхности критическое число  $\text{Re}$ , определяющее переход от ламинарного режима движения к турбулентному, равно  $10^5$ . Сравнивая полученное значение  $\text{Re}$  с критическим, делаем вывод, что  $83 \cdot 10^3 < 10^5$ , значит, режим движения ламинарный. Выписываем формулу для расчета среднего коэффициента теплоотдачи (2.39) и определяем значение  $\text{Nu}$ .

$$\overline{Nu}_{ж,l} = 0,66 Re_{ж,l}^{0,5} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} = 0,66 (83 \cdot 10^3)^{0,5} 0,703^{0,33} = 169.$$

Для газов, в частности для воздуха, значения  $Pr$  мало зависят от температуры, поэтому при расчетах  $\left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \approx 1$ .

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\overline{Nu} \lambda}{l} = \frac{169 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{0,125} = 35 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}.$$

**Пример 2.** Определить коэффициент теплоотдачи при течении воды в горизонтальной трубе внутренним диаметром  $d = 10$  мм и длиной  $l = 1,2$  м. Температура воды на входе в трубу  $t_{ж_1} = 10^\circ\text{C}$ , на выходе  $t_{ж_2} = 30^\circ\text{C}$ , средняя по длине трубы температура стенки  $t_c = 60^\circ\text{C}$ , расход воды  $G = 20$  кг/ч =  $0,0056$  кг/с.

*Решение.* Определим скорость течения воды по известному расходу  $G = w \rho f$ .

$$f = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

По определяющей температуре, которая для данного типа задач  $\bar{t}_{ж} = (t_{ж_1} + t_{ж_2})/2 = (10 + 30)/2 = 20^\circ\text{C}$ , выпишем из П. 1, табл. П. 1.5 физические свойства воды:

$$\rho = 998,2 \text{ кг/м}^3; \lambda = 0,597 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$Pr_{ж} = 7,03$ ;  $\beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ 1/К}$ .  $Pr_c = 3,03$  определяется по  $t_c$  из этой же таблицы.

Рассчитаем скорость движения воды

$$w = \frac{G}{\rho f} = \frac{0,0056}{998,2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-5}} = 0,07 \text{ м/с}.$$

По величине числа Рейнольдса определим режим течения жидкости:

$$Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{0,07 \cdot 0,01}{1,006 \cdot 10^{-6}} = 706 < 2300,$$

значит, режим течения ламинарный. Но при ламинарном режиме могут иметь место два подрежима: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Для того чтобы определить подрежим, вычислим комплекс  $(Gr_{ж,d} \cdot Pr_{ж})$ :



$$\text{Gr}_{ж,d} = \frac{g\beta(t_c - t_{ж})d^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot 1,82 \cdot 10^{-4} (60 - 20) \cdot (10 \cdot 10^{-3})^3}{(1,006 \cdot 10^{-6})^2} = 7,14 \cdot 10^4,$$

$$(\text{Gr}_{ж,d} \text{Pr}_{ж}) = 7,14 \cdot 10^4 \cdot 7,03 = 5,02 \cdot 10^5 < 8 \cdot 10^5,$$

значит, течение вязкостное. Выясним согласно (2.50), длинная труба или короткая. Для этого сравним  $\frac{l}{d} = \frac{1,2}{0,01} = 120$  с выражением

$$0,067 \text{Re}_{ж,d} \text{Pr}_{ж}^{5/6}.$$

$$0,067 \cdot 706 \cdot 7,03^{5/6} = 0,067 \cdot 706 \cdot 7,03^{5/6} = 239.$$

Поскольку  $120 < 239$ , делаем вывод — труба короткая. Для определения среднего коэффициента теплоотдачи используем формулу (2.52):

$$\overline{\text{Nu}}_{ж,d} = 1,4 \left( \text{Re}_{ж,d} \frac{d}{l} \right)^{0,4} \text{Pr}_{ж}^{0,33} \left( \frac{\text{Pr}_{ж}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25} = 1,4 \left( 705,8 \frac{0,01}{1,2} \right)^{0,4} 7,03^{0,33} \left( \frac{7,03}{3,03} \right)^{0,25} = 6,7.$$

$$\bar{\text{Nu}}_{ж,d} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{\text{Nu}}_{ж,d} \lambda}{d} = \frac{6,7 \cdot 0,597}{0,01} = 398 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

**Пример 3.** Трубы наружным диаметром 30 мм расположены в пучке с шахматной компоновкой (см. рис. 2.17, а). Продольный и поперечный шаги составляют:  $S_1 = S_2 = 60$  мм. Снаружи трубы омываются дымовыми газами, средняя температур которых  $\bar{t}_{ж} = 800$  °С и скорость 20 м/с. Определить средний коэффициент теплоотдачи от дымовых газов к наружной поверхности труб, средняя температура которых  $t_c = 500$  °С. Количество рядов труб по ходу дымовых газов  $Z = 10$ .

**Решение.** В пучке труб режим течения жидкости смешанный. Поэтому для расчета среднего коэффициента теплоотдачи для третьего и последующих рядов труб воспользуемся формулой (2.67). Предварительно выпишем из П. 1, табл. П. 1.3 физические параметры дымовых газов при определяющей температуре  $\bar{t}_{ж} = 800$  °С:  $\lambda = 9,15 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К);  $\nu = 131,8 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\text{Pr}_{ж} = 0,6$ . По температуре стенки из этой же таблицы выписываем значение  $\text{Pr}_c = 0,63$ .

В формуле (2.67)  $\varepsilon_{\psi} = 1$  (поток перпендикулярно набегаёт на пучок труб).

Так как  $S_1/S_2 < 2$ , то  $\varepsilon_s = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/6} = \left(\frac{60}{60}\right)^{1/6} = 1$ .

Так как  $Pr_{\text{ж}} \approx Pr_{\text{с}}$ , то  $\left(\frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_{\text{с}}}\right)^{0,25} \approx 1$ .

Рассчитаем Рейнольдс:  $Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{20 \cdot 0,03}{131,8 \cdot 10^{-6}} = 4,55 \cdot 10^3$ .

Подставим все значения в формулу (2.67) получим значение Нуссельта:

$$\overline{Nu}_{\text{ж},d} = 0,41 Re_{\text{ж},d}^{0,6} Pr_{\text{ж}}^{0,33} \left(\frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_{\text{с}}}\right)^{0,25} \varepsilon_s \varepsilon_{\psi} = 0,41 (4,55 \cdot 10^3)^{0,6} 0,6^{0,33} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 54,3.$$

По известной величине безразмерного числа Нуссельта определим коэффициент теплоотдачи для третьего и последующих рядов труб:

$$\bar{Nu} = \frac{\alpha_{3p} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha}_{3p} = \frac{\bar{Nu} \lambda}{d} = \frac{54,3 \cdot 9,15 \cdot 10^{-2}}{0,03} = 165,4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Средний коэффициент теплоотдачи всего пучка рассчитывается по формуле

$$\bar{\alpha}_{\text{пучка}} = \frac{\bar{\alpha}_{1p} + \bar{\alpha}_{2p} + \bar{\alpha}_{3p} (Z - 2)}{Z},$$

где  $\bar{\alpha}_{1p} = 0,6 \bar{\alpha}_{3p} = 0,6 \cdot 165,4 = 99,3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,

$\bar{\alpha}_{2p} = 0,7 \bar{\alpha}_{3p} = 0,7 \cdot 165,4 = 115,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,

$$\bar{\alpha}_{\text{пучка}} = \frac{99,3 + 115,8 + 165,4(10 - 2)}{10} = 153,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

## 2.9. Теплоотдача при свободном движении жидкости

Свободное движение возникает за счет разности плотностей нагретых и холодных объемов жидкости в гравитационном поле. Возникновение и интенсивность свободного или естественного движения в гравитационном поле полностью определяются тепловыми условиями процесса и зависят от рода жидкости, разности температур и объема пространства, в котором протекает процесс. Если объем жидкости на-

столько велик, что свободное движение, возникающее у поверхности других тел, расположенных в этом объеме, не оказывает влияния на движение жидкости вдоль поверхности рассматриваемого тела, то считается, что свободная конвекция происходит в неограниченном пространстве, в противном случае пространство считается ограниченным.

При свободной конвекции, так же, как и при вынужденной, могут иметь место два основных режима движения: ламинарный и турбулентный. Режим течения жидкости определяется по величине произведения Грасгофа на Прандтль ( $Gr \cdot Pr$ ).

### 2.9.1. Свободная конвекция в неограниченном пространстве

Рассмотрим качественную картину возникновения и развития свободной конвекции у поверхности вертикальной плоской стенки (рис. 2.19).

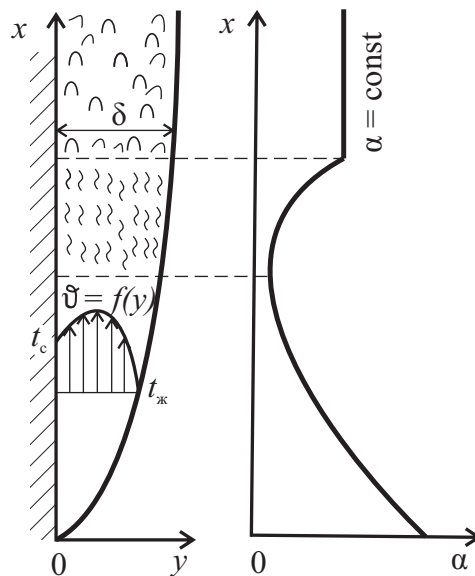


Рис. 2.19. Картина свободной конвекции и изменения коэффициента теплоотдачи по высоте вертикальной стенки

Пусть стенка всюду имеет одинаковую температуру  $t_c$  и находится в пространстве, заполненном жидкостью с температурой  $t_j$ , причем  $t_c > t_j$ . Тогда вследствие теплообмена жидкость, находящаяся вблизи

поверхности, будет иметь более высокую температуру, чем вдали от нее, а значит, и меньшую плотность. Поскольку на жидкость действует гравитационное поле, то возникает подъемная сила, которая приводит к образованию восходящего потока жидкости вдоль стенки. Режим движения в восходящем потоке жидкости сначала ламинарный ( $Gr \cdot Pr \leq 10^9$ ), а при достаточной протяженности стенки может перейти в турбулентный ( $Gr \cdot Pr \geq 6 \cdot 10^{10}$ ).

### 2.9.2. Теплоотдача при свободном ламинарном ( $Gr \cdot Pr \leq 10^9$ ) движении жидкости вдоль вертикальной стенки

Постановка задачи. Имеется вертикальная стенка (см. рис. 2.19), ее температура  $t_c = \text{const}$ . Стенка омывается жидкостью, температура которой вдали от стенки  $t_j = \text{const}$  ( $t_c > t_j$ ).  $Pr = 1$ , т. е. толщина гидродинамического и теплового пограничных слоев одинаковы ( $\delta_r = \delta_t = \delta$ ). Процесс стационарный (температура и скорость движения жидкости во времени не изменяются).

Требуется получить формулу для расчета среднего коэффициента теплоотдачи (безразмерного числа  $Nu$ ).

При решении задачи сделаем следующие допущения: стенка вдоль осей  $x$  и  $z$  бесконечная; силы инерции малы по сравнению с силами тяжести и вязкости; не учитываем перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью вдоль движущегося слоя жидкости (оси  $x$ ); градиент давления в пограничном слое мал и им пренебрегаем; физические параметры жидкости (исключая плотность) не зависят от температуры, а плотность является линейной функцией температуры.

Для нахождения коэффициента теплоотдачи от стенки к жидкости воспользуемся дифференциальным уравнением теплоотдачи (2.10), записанным через избыточные температуры  $\vartheta = t - t_j$  и  $\vartheta_0 = t_c - t_j$ .

$$\alpha = - \frac{\lambda}{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=0}.$$

В этом уравнении неизвестен градиент температуры жидкости  $\left( \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=0} \right)$  вблизи стенки. Установлено [1], что температура в пристенном слое изменяется по параболическому закону

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 = \vartheta_0 \left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right). \quad (2.74)$$

Тогда  $\left. \frac{d\vartheta}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{2\vartheta_0}{\delta}$ . Подставляя это значение в дифференциальное уравнение теплоотдачи, получаем

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta}. \quad (2.75)$$

Таким образом, чтобы найти  $\alpha$ , нужно знать закономерность изменения толщины пограничного слоя по высоте стенки  $\delta = f(x)$ . Для выяснения этого выделим участок поверхности площадью  $dx \cdot l$ , вдоль которого поднимается поток жидкости (на рис. 2.20). Примем  $l = 1$  м.

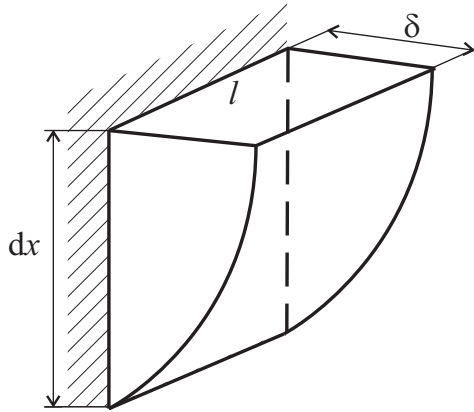


Рис. 2.20. Элемент пограничного слоя жидкости

Тепловой поток, отводимый от этого участка стенки в процессе теплоотдачи  $dQ = \alpha \vartheta_0 dx \cdot l$ , нагревает жидкость  $dQ = c_p \bar{\vartheta} dG$ , движущуюся вдоль выделенного участка стенки.

$$\alpha \vartheta_0 dx \cdot l = c_p \bar{\vartheta} dG, \quad (2.76)$$

где  $\bar{\vartheta}$  — средняя интегральная избыточная температура жидкости в сечении пограничного слоя;  $dG$  — элементарный расход массы жидкости через сечение площадью  $(\delta \cdot l)$ . Подставим в (2.76) значение  $\alpha$  согласно формуле (2.75) и выразим  $dG$  в виде

$$dG = \frac{2\lambda}{\delta c_p} \frac{\vartheta_0}{\vartheta} dx. \quad (2.77)$$

С другой стороны, элементарный расход жидкости можно определить как

$$dG = d(\rho_{\text{ж}} \bar{w}_x \delta \cdot 1). \quad (2.78)$$

Приравняем (2.77) и (2.78):

$$\frac{2\lambda}{\delta c_p} \frac{\vartheta_0}{\vartheta} dx = d(\rho_{\text{ж}} \bar{w}_x \delta). \quad (2.79)$$

В (2.79)  $\bar{w}_x$  — средняя интегральная скорость и  $\bar{\vartheta}$  — средняя интегральная избыточная температура жидкости по сечению пограничного слоя не известны. Из уравнения (2.74) найдем  $\bar{\vartheta}$ :

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \vartheta_0 \left( 1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy = \frac{\vartheta_0}{3}. \quad (2.80)$$

Для определения  $\bar{w}_x$  установим закономерность изменения скорости в пограничном слое. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением движения в проекции на ось  $x$  (2.12), которое в силу принятых нами упрощений будет иметь вид

$$0 = g_x \beta \vartheta_0 \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 + \nu \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (2.81)$$

Решаем это уравнение. Если известна вторая производная

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{g \beta \vartheta_0}{\nu} \left( 1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right),$$

то первая производная будет

$$\frac{dw_x}{dy} = -\frac{g \beta \vartheta_0}{\nu} \left( y - \frac{y^2}{\delta} + \frac{y^3}{3\delta} \right) + C_1.$$

Разделяя переменные

$$dw_x = -\frac{g \beta \vartheta_0}{\nu} \left( y - \frac{y^2}{\delta} + \frac{y^3}{3\delta} \right) dy + C_1 dy$$

и интегрируя левую и правую части этого уравнения

$$\int dw_x = -\frac{g \beta \vartheta_0}{\nu} \left[ \int y dy - \int \frac{1}{\delta} y^2 dy + \int \frac{1}{3\delta} y^3 dy \right] + \int C_1 dy,$$

получаем общее решение уравнения (2.81) в виде

$$w_x = -\frac{g\beta\vartheta_0}{\nu} \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta} + \frac{y^4}{12\delta^2} \right] + C_1 y + C_2.$$

Чтобы найти частное решение, воспользуемся граничными условиями, согласно которым при  $y = 0$   $w_x = 0$ ; при  $y = \delta$   $w_x = 0$  получаем закономерность изменения скорости в пограничном слое

$$w_x = \frac{g\beta\vartheta_0}{\nu} \left( \frac{\delta}{4} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\delta} - \frac{y^4}{12\delta^2} \right). \quad (2.82)$$

Используя (2.82), находим среднюю по сечению пограничного слоя скорость потока:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{g\beta\vartheta_0}{\nu} \left( \frac{\delta}{4} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\delta} - \frac{y^4}{12\delta^2} \right) dy = \frac{g\beta\vartheta_0}{\nu} \frac{\delta^2}{40}. \quad (2.83)$$

Подставим (2.80) и (2.83) в (2.79), получим

$$\frac{6\lambda}{\delta c_p} dx = \frac{\rho_{\text{ж}} g \beta \vartheta_0}{40 \nu} d(\delta^3). \quad (2.84)$$

Продифференцируем правую часть этого уравнения, перенесем  $\delta$  из левой части в правую, а затем проинтегрируем обе части уравнения, получим

$$\delta^4 = \frac{320 \lambda x \nu}{\rho_{\text{ж}} g \beta \vartheta_0 c_p}. \quad (2.85)$$

Из (2.85) определим толщину пограничного слоя:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{320 \nu x \lambda}{\rho_{\text{ж}} g \beta \vartheta_0 c_p}}. \quad (2.86)$$

Подставим значение  $\delta$  в формулу (2.75):

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta} = 0,473 \sqrt[4]{\frac{c_p \beta g \rho_{\text{ж}} \vartheta_0 \lambda^3}{\nu x}}. \quad (2.87)$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду. Для этого умножим левую и правую части уравнения на  $x/\lambda$ , тогда

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = 0,473 \sqrt[4]{\frac{g \beta \vartheta_0 x^3}{\nu} \frac{c_p \rho_{\text{ж}}}{\lambda} \frac{\nu}{\nu}},$$

или

$$\text{Nu}_x = 0,473(\text{Gr}_x \text{Pr})^{0,25}. \quad (2.88)$$

Анализ формулы (2.88) показывает, что с увеличением  $x$  величина локального коэффициента теплоотдачи уменьшается:  $\alpha = Cx^{-0,25}$ . Определим средний коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l C x^{-0,25} dx = \frac{4}{3} C l^{-0,25}, \text{ т. е. } \bar{\alpha} = \frac{4}{3} \alpha.$$

Тогда

$$\bar{\text{Nu}}_l = 0,63(\text{Gr}_l \text{Pr})^{0,25}. \quad (2.89)$$

Формула получена при ряде упрощений, поэтому ее необходимо скорректировать с учетом опытных данных.

**Расчетные формулы.** Для расчета местных (локальных) коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном течении жидкости вдоль вертикальной стенки используется формула

$$\text{Nu}_{ж,x} = 0,60(\text{Gr}_{ж,x} \text{Pr}_ж)^{0,25} \left( \frac{\text{Pr}_ж}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}. \quad (2.90)$$

Расчет среднего коэффициента теплоотдачи рекомендуется вести по формуле

$$\bar{\text{Nu}}_{ж,l} = 0,75(\text{Gr}_{ж,l} \text{Pr}_ж)^{0,25} \left( \frac{\text{Pr}_ж}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}. \quad (2.91)$$

За определяющий размер в (2.90) принята координата  $x$ , отсчитываемая от места начала теплообмена, а в (2.91) — высота стенки  $l$ . Определяющая температура —  $t_{ж}$ .

### 2.9.3. Теплоотдача при свободном турбулентном режиме ( $\text{Gr} \cdot \text{Pr} \geq 6 \cdot 10^{10}$ ) движения жидкости вдоль вертикальной стенки

Для расчета локального коэффициента теплоотдачи при свободном развитом турбулентном течении жидкости вдоль вертикальной стенки предложена формула [4]:



$$Nu_{ж,x} = 0,15 (Gr_{ж,x} Pr_{ж})^{1/3} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Анализ этой формулы показывает, что коэффициент теплоотдачи не зависит от высоты стенки (линейный размер в безразмерном числе Нуссельта ( $Nu = \frac{\alpha x}{\lambda}$ ) в первой степени и в безразмерном числе

$Gr = \left( \frac{g \beta \vartheta_0 x^3}{\nu^2} \right)^{1/3}$  также в первой степени, так что линейный размер сокращается. Значит, средний коэффициент теплоотдачи определяется по той же формуле, что и локальный:

$$\bar{Nu}_{ж,l} = 0,15 (Gr_{ж,l} Pr_{ж})^{1/3} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.92)$$

$$\bar{Nu}_{ж,l} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu}_{ж,l} \lambda}{l}.$$

Определяющим размером в (2.92) при расчете среднего коэффициента теплоотдачи является высота стенки  $l$ , а при расчете местного коэффициента теплоотдачи —  $x$ . Определяющая температура —  $t_{ж}$ .

Изменение коэффициента теплоотдачи по высоте вертикальной стенки при различных режимах течения показано на рис. 2.18, согласно которому максимальное значение  $\alpha$  имеет в точке  $y = 0$ , так как в этой точке  $\delta = 0$ . По мере увеличения толщины ламинарного пограничного слоя величина  $\alpha$  уменьшается. При переходном (от ламинарного к турбулентному) режиме коэффициент теплоотдачи несколько возрастает. При развитом турбулентном режиме движения жидкости в пограничном слое коэффициент теплоотдачи остается величиной неизменной.

#### 2.9.4. Теплоотдача при свободном движении жидкости около горизонтальной трубы

Картина движения жидкости при свободном ее течении около горизонтальной трубы показана на рис. 2.21.

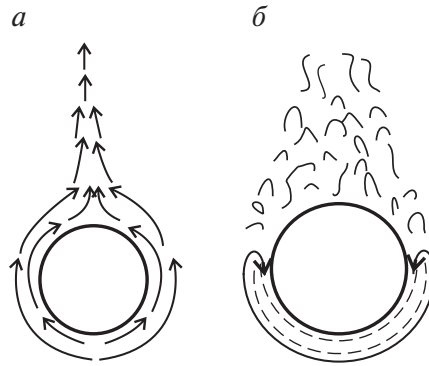


Рис. 2.21. Картина обтекания трубы в зависимости от размера ее наружного диаметра, мм:  
 $a - d < 10$ ;  $b - d \gg 10$

У поверхности труб небольшого диаметра ( $d < 10$  мм) образуется ламинарный пограничный слой: турбулентность если и возникает, то вдали от трубы и на процесс теплообмена не оказывает влияния (рис. 2.20,  $a$ ). Для труб большого диаметра часть поверхности может омываться вихрями (рис. 2.20,  $b$ ).

Для расчета средних коэффициентов теплоотдачи при свободном движении жидкости около горизонтальной трубы может быть использована формула [4]:

$$\bar{Nu}_{ж,d} = 0,5 \left( Gr_{ж,d} Pr_{ж} \right)^{0,25} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}, \quad (2.93)$$

$$\bar{Nu}_{ж,d} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu}_{ж,d} \lambda}{d}.$$

В качестве определяющего геометрического размера в формуле (2.93) берется наружный диаметр трубы, а в качестве определяющей температуры — температура набегающего потока жидкости.

### 2.9.5. Теплоотдача при свободном движении жидкости около горизонтально расположенной пластины

При горизонтальном расположении пластины характер конвекции зависит от ее размеров и от того, куда обращена поверхность теплообмена. Если горячая поверхность обращена вверх, то для пластины

небольших размеров, находящейся в пространстве, размер которого много больше размера пластины, (рис. 2.22, *а*) холодная жидкость поступает с периферии, а в центре наблюдается восходящий поток. Для пластины достаточно большой протяженности поступление холодной жидкости с краев оказывается недостаточным, происходит чередование восходящих и нисходящих потоков (рис. 2.22, *б*). Если горячая поверхность обращена вниз (рис. 2.22, *в*), то в свободном движении участвует только тонкий слой жидкости, непосредственно примыкающий к поверхности, а масса жидкости ниже этого слоя остается неподвижной.

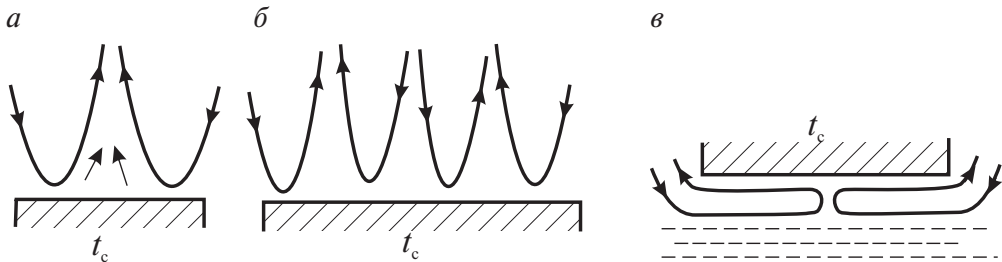


Рис. 2.22. Схема движения жидкости у горизонтально расположенных пластин

При расчете средних коэффициентов теплоотдачи для горизонтально расположенных плит можно пользоваться формулами (2.91) и (2.92), только в качестве определяющего размера нужно брать размер меньшей стороны плиты, полученное значение коэффициента теплоотдачи необходимо увеличить на 30 %, если теплоотдающая поверхность обращена вверх, или уменьшить на 30 %, если теплоотдающая поверхность обращена вниз [4].

### 2.9.6. Теплоотдача при свободном движении жидкости в ограниченном пространстве

В ограниченном пространстве нагретая и холодная поверхности находятся вблизи друг от друга. Если для вертикальной щели (рис. 2.23, *а*) толщина  $\delta$  достаточно велика, то развитие свободной конвекции происходит так же, как в большом объеме.

В узкой щели (рис. 2.23, *б*) восходящий и нисходящий потоки движутся с взаимными помехами, поэтому образуются циркуляционные

токи, высота которых  $h$  зависит от толщины  $\delta$ , природы жидкости и разности температур  $(t_{c_1} - t_{c_2})$ .

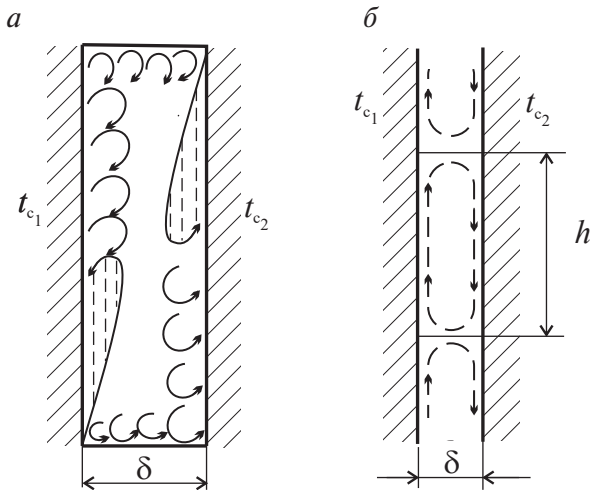


Рис. 2.23. Картина движения потоков жидкости в пространстве между вертикальными поверхностями расположенными:

*а* — далеко друг от друга; *б* — в узких щелях

В горизонтальных щелях интенсивность конвекции, кроме перечисленных факторов, определяется взаимным расположением нагретой и холодной поверхности. Если нагретая поверхность (рис. 2.24, *а*), имеющая температуру  $t_{c_2}$ , расположена над холодной, температура которой  $t_{c_1}$  ( $t_{c_1} < t_{c_2}$ ), то верхние слои жидкости будут иметь более высокую температуру, а следовательно, меньшую плотность, чем нижние, но подниматься им некуда, поэтому свободная конвекция отсутствует.

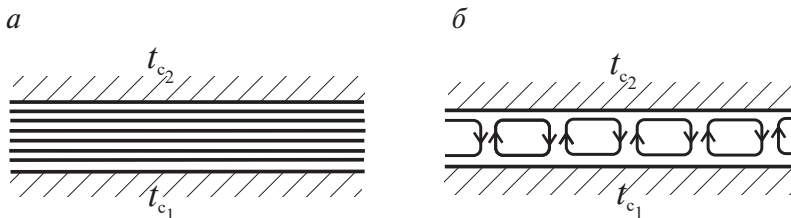


Рис. 2.24. Горизонтальные щели:

*а* — конвекция отсутствует; *б* — упорядоченный характер конвекции

При расположении холодной поверхности над горячей ( $t_{c_1} > t_{c_2}$ ) температура верхних слоев жидкости будет меньше, чем нижних, и уже при  $(Gr \cdot Pr) > 1700$  возникает свободная конвекция, имеющая внача-

ле упорядоченный (рис. 2.24, б), а затем, при  $(Gr \cdot Pr) > 47000$ , хаотический (турбулентный) характер.

В горизонтальных цилиндрических прослойках свободная конвекция также зависит от взаимного расположения горячей и холодной поверхностей. Если горячей будет внутренняя поверхность (рис. 2.25, а), то жидкость, лежащая под ней, не будет участвовать в свободном движении по той же причине, что и на рис. 2.24, а. В остальной части пространства вдоль горячей поверхности движение будет восходящим и нисходящим вдоль холодной поверхности. Если наружная поверхность является горячей, то будет отсутствовать конвекция над холодной поверхностью. В остальной части объема возникают циркуляционные токи, как показано на рис. 2.25, б.

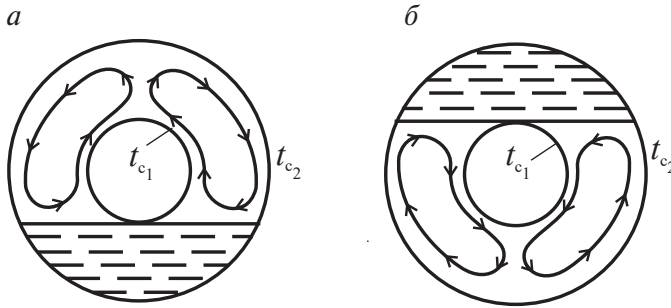


Рис. 2.25. Картина свободного движения жидкости в горизонтальных цилиндрических прослойках:

$$a - (t_{c1} > t_{c2}); \quad б - (t_{c1} < t_{c2})$$

Ввиду сложности процесса для определения теплового потока через жидкостные прослойки пользуются следующим приемом: сложный процесс конвективного теплообмена заменяют эквивалентным процессом теплопроводности, характеризуемым коэффициентом  $\lambda_{\text{экв}}$ . Расчет ведется по формулам теплопроводности [1]:

- для плоской стенки (для плоской щели):

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}), \quad Q = q \cdot F; \quad (2.94)$$

- для цилиндрической стенки (для цилиндрической прослойки):

$$q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda_{\text{экв}}} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad Q = q_l \cdot l, \quad (2.95)$$

где  $\lambda_{\text{экв}} = \varepsilon_k \lambda_{\text{ж}}$ . Поправка  $\varepsilon_k = f(\text{Gr Pr})$  учитывает влияние свободной конвекции на перенос теплоты через жидкостные прослойки и называется коэффициентом конвекции.

Вид функции  $\varepsilon_k = f(\text{Gr Pr})$  установлен экспериментально и определяется следующими формулами:

- при  $(\text{Gr}_{\text{ж},\delta} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}}) < 10^3$  свободная конвекция отсутствует и  $\varepsilon_k = 1$ ;
- при  $(\text{Gr}_{\text{ж},\delta} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}}) = (10^3 \dots 10^6) \varepsilon_k = 0,105 (\text{Gr}_{\text{ж},\delta} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,3}$ ;
- при  $(\text{Gr}_{\text{ж},\delta} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}}) \geq (10^6 \dots 10^{10}) \varepsilon_k = 0,4 (\text{Gr}_{\text{ж},\delta} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,2}$ .

Во всех случаях независимо от формы прослойки в качестве определяющего геометрического размера принята толщина прослойки  $\delta$ ,

а в качестве определяющей температуры —  $t_{\text{ж}} = \frac{t_{c_1} + t_{c_2}}{2}$ .

### Примеры решения задач по теме «Теплоотдача при свободном движении жидкости»

**Пример 1.** Определить тепловой поток, который передается воздуху от поверхности вертикального трубопровода наружным диаметром  $d = 120$  мм и высотой  $h = 6$  м. Температура поверхности трубопровода  $t_c = 250$  °С, температура окружающего воздуха  $t_{\text{ж}} = 20$  °С.

*Решение.* В данной задаче теплообмен осуществляется за счет свободной конвекции. Формула для расчета теплового потока в процессе теплоотдачи  $Q = \bar{\alpha}(t_c - t_{\text{ж}})F$ . Вычислим коэффициент теплоотдачи.

Определим режим течения воздуха при свободной конвекции по величине  $(\text{Gr}_{\text{ж},h} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}})$ . По определяющей температуре  $t_{\text{ж}} = 20$  °С из П. 1,

табл. П. 1.2 выпишем следующие значения:  $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К);

$\text{Pr}_{\text{ж}} = 0,703$ ;  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Из этой же таблицы по величине температуры стенки выпишем значение  $\text{Pr}_c = 0,677$ . Определяющим геометрическим размером в этой задаче является высота трубопровода  $h$ .

Определим безразмерное число Грасгофа:  $\text{Gr}_{\text{ж},h} = \frac{g\beta(t_c - t_{\text{ж}})h^3}{\nu^2}$ , где

$$\beta = \frac{1}{T_{\text{ж}}} = \frac{1}{293}, \text{ 1/K.}$$

$$\text{Gr}_{ж,h} = \frac{9,81(250 - 20)6^3}{293(15,06 \cdot 10^{-6})^2} = 7,3 \cdot 10^{12}.$$

Определим режим движения жидкости по величине произведения Грасгофа на Прандтль.

$$(\text{Gr}_{ж,h} \text{Pr}_ж) = 7,3 \cdot 10^{12} \cdot 0,703 = 5,16 \cdot 10^{12} > 6 \cdot 10^{10},$$

значит, режим движения жидкости турбулентный. Для расчета  $\bar{\alpha}$  при турбулентном режиме воспользуемся формулой (2.92). Учтем, что  $\text{Pr}_c \approx \text{Pr}_ж$ , поэтому  $(\text{Pr}_ж/\text{Pr}_c)^{0,25} = 1$ .

$$\overline{\text{Nu}}_{ж,h} = 0,15(\text{Gr}_{ж,h} \text{Pr}_ж)^{1/3} \left( \frac{\text{Pr}_ж}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25} = 0,15(7,3 \cdot 10^{12})^{1/3} \cdot 1 = 2825.$$

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} h}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\overline{\text{Nu}} \lambda}{h} = \frac{2825 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{6} = 12 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

$$Q = \bar{\alpha}(t_c - t_ж) \pi d h = 12(250 - 20)3,14 \cdot 0,12 \cdot 6 = 6240 \text{ Вт}.$$

**Пример 2.** Определить плотность теплового потока, передаваемого через щель от нижней поверхности, температура которой  $t_{c_1} = 55^\circ\text{C}$ , к верхней поверхности, имеющей температуру  $t_{c_2} = 25^\circ\text{C}$ . Щель заполнена трансформаторным маслом. Ширина щели  $\delta = 15 \text{ мм}$ .

*Решение.* В щели теплота передается свободной конвекцией, причем пространство ограничено. В этом случае плотность теплового потока рассчитывается по формуле (2.94):  $q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\delta}(t_{c_1} - t_{c_2})$ . Для расчета

эквивалентного коэффициента теплопроводности, величина которого зависит от произведения безразмерных чисел Грасгофа и Прандтля ( $\epsilon_k = f(\text{GrPr})$ ), из П. 1, табл. П. 1.4 выпишем физические параметры трансформаторного масла по определяющей температуре  $t_ж = (t_{c_1} + t_{c_2})/2 = (55 + 25)/2 = 40^\circ\text{C}$ .

$$\lambda = 0,11 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \quad \nu = 10,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \beta = 7 \cdot 10^{-4} \text{ 1/К}; \quad \text{Pr} = 146.$$

Рассчитаем величину Грасгофа. Определяющим геометрическим размером является ширина щели  $\delta$ .

$$Gr_{ж,\delta} = \frac{g\beta(t_{c_1} - t_{c_2})\delta^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot 7 \cdot 10^{-4} (55 - 25) 0,015^3}{(10,3 \cdot 10^{-6})^2} = 6,6 \cdot 10^3.$$

$$(Gr_{ж,\delta} Pr_{ж}) = 6,6 \cdot 10^3 \cdot 146 = 957 \cdot 10^3.$$

Так как  $(Gr_{ж,\delta} Pr_{ж}) < 10^6$ , то коэффициент конвекции найдется по формуле

$$\varepsilon_k = 0,105 (Gr_{ж,\delta} Pr_{ж})^{0,3} = 0,105 (957 \cdot 10^3)^{0,3} = 6,54.$$

Зная коэффициент конвекции, рассчитаем эквивалентный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{\text{экв}} = \lambda_{ж} \varepsilon_k = 0,11 \cdot 6,54 = 0,72 \text{ Вт/(м·К)}$$

и плотность теплового потока

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\delta} (t_{c_1} - t_{c_2}) = \frac{0,72}{0,015} (55 - 25) = 1440 \text{ Вт/м}^2.$$

## 2.10. Теплообмен при фазовых превращениях

При фазовых превращениях вещество из одного агрегатного состояния переходит в другое. Процесс перехода жидкости в пар называется процессом кипения или фазовым переходом первого рода. Для превращения килограмма кипящей жидкости в пар необходимо подвести теплоту парообразования ( $r$ ). Превращение пара в жидкость называют процессом конденсации. При этом выделяется теплота фазового перехода (теплота парообразования  $r$ ), которую необходимо непрерывно отводить. Следовательно, процессы кипения и конденсации неразрывно связаны с теплообменом.

### 2.10.1. Теплоотдача при конденсации водяного пара на вертикальной поверхности

Образующаяся при конденсации жидкость называется конденсатом. Конденсат выпадает на поверхности теплообмена либо в виде от-



дельных капель — капельная конденсация, либо в виде сплошной пленки — пленочная конденсация. Последняя возможна, когда поверхность смачивается конденсатом, и в инженерной практике встречается чаще всего. Режим течения пленки конденсата может быть ламинарным, если  $Re_\delta < 400$ , или турбулентным ( $Re_\delta \geq 400$ ).  $Re_\delta = \frac{w\delta}{\nu}$ , где

$\delta$  — толщина пленки конденсата;  $w$  — скорость ее в том же месте, где измерена толщина пленки конденсата  $\delta$ . Турбулентный режим имеет место лишь на достаточно протяженных поверхностях.

**Постановка задачи.** Рассмотрим теплообмен при пленочной конденсации неподвижного сухого насыщенного пара, имеющего температуру  $t_s$ , на вертикальной стенке (рис. 2.26).

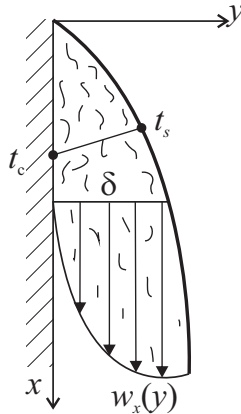


Рис. 2.26. Пленка конденсата на вертикальной стенке

Температура стенки  $t_c = \text{const}$ . Конденсация возможна, если  $t_c < t_s$ , при этом образующийся конденсат стекает в виде сплошной пленки. Течение пленки имеет ламинарный характер. Размеры стенки по осям  $x$  и  $z$  бесконечны. Температуры стенки и пара во времени не изменяются. Необходимо получить формулу для расчета среднего коэффициента теплоотдачи.

**Допущения при решении задачи.** Силы инерции, возникающие в пленке конденсата, малы по сравнению с силами вязкости и тяжести. Переносом теплоты конвекцией и теплопроводностью в пленке конденсата (вдоль оси  $x$ ) пренебрегаем по сравнению с теплопроводностью поперек пленки (вдоль оси  $y$ ). Считаем, что трение на границе

пар — жидкость отсутствует. Температура на внешней границе пленки конденсата равна температуре пара. Градиент давления жидкости в пленке конденсата мал и им пренебрегаем. Теплофизические параметры конденсата ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) не зависят от температуры. Плотность пара мала по сравнению с плотностью конденсата.

Для определения коэффициента теплоотдачи запишем дифференциальное уравнение теплоотдачи (2.10):  $\alpha = - \frac{\lambda}{t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}} \frac{dt}{dy} \Big|_{y=0}$ , в котором неизвестен градиент температуры жидкости у стенки  $\left( \frac{dt}{dy} \right)_{y=0}$ . Чтобы

знать  $\frac{dt}{dy} \Big|_{y=0}$ , необходимо иметь уравнение, которое описывало бы температурное поле в пленке конденсата. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением энергии (2.11), которое применительно к условиям данной задачи будет иметь вид

$$\frac{d^2 t}{dy^2} = 0. \quad (2.96)$$

Решая уравнение (2.96) совместно с граничными условиями (при  $y = 0 \quad t = t_{\text{с}}$ , а при  $y = \delta \quad t = t_{\text{с}}$ ), получаем

$$\frac{dt}{dy} = \frac{t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}}{\delta}.$$

Подставляя это значение в дифференциальное уравнение теплоотдачи, имеем

$$\alpha = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}} \frac{t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}}{\delta} = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta}. \quad (2.97)$$

Из (2.97) следует, что коэффициент теплоотдачи уменьшается по мере возрастания толщины пленки конденсата.

Толщина пленки конденсата определяется приростом массового расхода жидкости, обусловленного конденсацией пара (рис. 2.27).

Секундный расход конденсата через поперечное сечение пленки при ее ширине  $l = 1$  можно представить в виде  $G = \rho_{\text{ж}} \bar{w}_x (\delta \cdot 1)$ . Через сечение, лежащее ниже этого на  $dx$ , расход конденсата изменится на величину

$$dG = d(\rho_{\text{ж}} \bar{w}_x \delta). \quad (2.98)$$

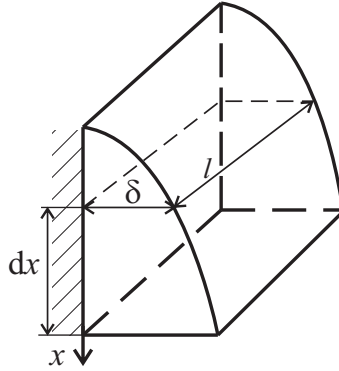


Рис. 2.27. Увеличение толщины пленки жидкости у стенки в процессе конденсации

Это изменение  $dG$  можно еще определить и через теплоту фазового перехода  $dQ = r dG$ , которая в свою очередь передается теплопроводностью через пленку конденсата  $dQ = q(dx \cdot l) = \frac{\lambda_{\text{ж}}(t_s - t_c)}{\delta} dx$ .

Приравнивая эти выражения, найдем  $dG$ :

$$r \cdot dG = \frac{\lambda_{\text{ж}}(t_s - t_c)}{\delta} dx,$$

откуда

$$dG = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta \cdot r} (t_s - t_c) dx, \quad (2.99)$$

где  $r$  — скрытая теплота парообразования, Дж/кг.

Подставив (2.98) в (2.99), имеем

$$d(\rho_{\text{ж}} \bar{w}_x \delta) = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta \cdot r} (t_s - t_c) dx. \quad (2.100)$$

В этом выражении неизвестна средняя скорость конденсата  $\bar{w}_x$  в рассматриваемом нами сечении (см. рис. 2.26). Для того чтобы определить  $w_x = f(y)$ , необходимо знать закон изменения скорости по оси  $y$ . Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось  $x$  (2.13), которое при принятых нами допущениях будет иметь вид

$$-\rho_{\text{ж}} g = \mu_{\text{ж}} \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (2.101)$$

Решая уравнение (2.101) совместно с граничными условиями (при  $y = 0$   $w_x = 0$ , а при  $y = \delta$   $\frac{dw_x}{dy} = 0$ , так как трением на границе пар — жидкость пренебрегаем), получаем

$$w_x = \frac{\rho_{\text{ж}} g \delta}{\mu_{\text{ж}}} y - \frac{\rho_{\text{ж}} g}{2\mu_{\text{ж}}} y^2.$$

Средняя по сечению пленки конденсата скорость определится по формуле

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left( \frac{\rho_{\text{ж}} g \delta}{\mu_{\text{ж}}} y - \frac{\rho_{\text{ж}} g}{2\mu_{\text{ж}}} y^2 \right) dy = \frac{\rho_{\text{ж}} g}{3\mu_{\text{ж}}} \delta^2. \quad (2.102)$$

Подставим (2.102) в (2.100) и продифференцируем левую часть равенства. Имеем

$$\frac{\rho_{\text{ж}}^2 g \delta^3}{\mu_{\text{ж}}} d\delta = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{r} (t_s - t_c) dx.$$

Проинтегрировав левую часть этого выражения от 0 до  $\delta$ , а правую — от 0 до  $x$ , получим формулу для расчета толщины пленки конденсата

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda_{\text{ж}} \mu_{\text{ж}} (t_s - t_c) x}{r \rho_{\text{ж}}^2 g}}. \quad (2.103)$$

Подставляя (2.103) в (2.97), получаем формулу для расчета местного коэффициента теплоотдачи при пленочной конденсации пара на вертикальной стенке:

$$\alpha = 0,7 \sqrt[4]{\frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{(t_s - t_c) \mu_{\text{ж}} x}}. \quad (2.104)$$

Значение среднего по высоте стенки коэффициента теплоотдачи находится по формуле

$$\bar{\alpha}_{\text{Nu}} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha dx = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{\mu_{\text{ж}} (t_s - t_c) h}}. \quad (2.105)$$

Уравнение (2.105) впервые было получено Нуссельтом.

Как показали исследования [6], ламинарное течение пленки конденсата может сопровождаться ее волнообразным движением. При таком движении средняя толщина пленки будет меньше, чем при строго ламинарном режиме, и коэффициент теплоотдачи может быть при-

мерно на 20 % больше, чем дает формула (2.105). Кроме того, при выводе формулы (2.105) не учитывалась зависимость теплофизических параметров от температуры.

**Расчетная формула.** Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации неподвижного чистого пара на вертикальной поверхности при ламинарном режиме течения пленки конденсата можно использовать формулу

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{Nu} \cdot \varepsilon_t \cdot \varepsilon_v, \quad (2.106)$$

где  $\bar{\alpha}_{Nu}$  вычисляется по формуле (2.105);  $\varepsilon_t = \left( \frac{Pr_s}{Pr_c} \right)^{0,25}$  — поправка, учитывающая изменение теплофизических параметров конденсата от температуры.  $\varepsilon_v = Re_\delta^{0,04}$  — поправка на волновое течение пленки конденсата. При значениях  $Re_\delta = \frac{w\delta}{\nu} \ll 400$  эта поправка близка к 1, а при  $Re_\delta = 400$   $\varepsilon_v = 1,27$ .

В формулах (2.104), (2.105) определяющая температура  $t_{ж} = \frac{t_s + t_c}{2}$ .

Скрытая теплота парообразования ( $r$ ) берется из таблиц по температуре насыщения ( $t_s$ ).

## 2.10.2. Факторы, влияющие на теплообмен при конденсации

**Влияние наклона поверхности.** Формулы, полученные выше, справедливы при конденсации пара на вертикальных стенках. Если стенка будет наклонена от вертикали на угол  $\varphi$ , то в формулах (2.104), (2.105) вместо ускорения  $g$  необходимо использовать проекцию ускорения  $g_x = g \cdot \cos \varphi$ .

**Теплоотдача при конденсации на горизонтальной трубе и пучке труб.** Для горизонтально расположенной трубы Нуссельт получил следующую формулу для расчета среднего по наружной поверхности трубы коэффициента теплоотдачи при ламинарном течении пленки конденсата:

$$\bar{\alpha}_r = 0,728 \sqrt[4]{\frac{r g \rho_{\text{ж}}^2 \lambda_{\text{ж}}^3}{\mu_{\text{ж}} (t_s - t_c) d}}. \quad (2.107)$$

На практике, как правило, одиночно расположенные горизонтальные трубы не используются. Трубы собираются в пучки с шахматной или коридорной компоновкой. Пар конденсируется на поверхностях труб. С верхних рядов труб конденсат стекает на нижележащие пучки труб, поэтому на них пленка конденсата получается толще, а коэффициент теплоотдачи меньше, чем для верхнего ряда. Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи от пучка труб, на котором конденсируется неподвижный сухой насыщенный пар, можно рекомендовать формулу [4]:

$$\bar{\alpha}_{\text{пучка}} = \bar{\alpha}_r \frac{0,84}{Z^{0,07}}, \quad (2.108)$$

где  $\bar{\alpha}_r$  определяется по формуле (2.107);  $Z$  — число рядов труб по вертикали для коридорного пучка, для шахматного пучка  $Z$  равно половине числа рядов труб по вертикали.

**Влияние скорости и направления движения пара.** Формулы, полученные выше, справедливы для конденсации неподвижного пара или при малых скоростях его течения (меньше 10 м/с). При больших скоростях пара между паром и пленкой жидкости возникает трение. Если направление движения пара совпадает с направлением течения пленки конденсата, то ее толщина уменьшается, а коэффициент теплоотдачи возрастает. При движении пара снизу вверх течение пленки тормозится, ее толщина возрастает, а величина  $\pm$  уменьшается. Однако это происходит до тех пор, пока сила трения не превысит силу тяжести. Если сила трения превышает силу тяжести, то пленка жидкости увлекается потоком пара вверх и срывается с поверхности, в этом случае коэффициент теплоотдачи будет увеличиваться с возрастанием скорости пара.

**Влияние шероховатости поверхности.** Интенсивность процесса теплоотдачи зависит от состояния поверхности. Если она шероховатая или покрыта слоем окисла, то вследствие дополнительного сопротивления течению пленки толщина ее увеличивается, а величина коэффициента теплоотдачи при этом уменьшается.

**Влияние перегрева пара.** Если пар, соприкасающийся с поверхностью, перегрет, то нужно учитывать теплоту перегрева  $q_n = c_{\text{пара}} (t_{\text{пара}} - t_s)$ . Вместо теплоты парообразования  $r$  в расчетные формулы необходимо ставить  $r' = r + q_n$ . Если пар влажный, то  $r' = r \cdot x$ , где  $x$  — степень сухости пара.

**Влияние наличия неконденсирующихся газов в паре.** Значительное влияние на интенсивность процесса теплоотдачи может оказать наличие в паре неконденсирующихся газов, например воздуха. Пар, соприкасаясь с холодной поверхностью, конденсируется, а имеющийся в нем воздух скапливается у стенки, оказывая значительное препятствие процессу конденсации.

Эксперименты показывают [6], что наличие 3 % воздуха в неподвижном паре уменьшает коэффициент теплоотдачи в 5 раз. Если пар движется, то скапливающийся у поверхности неконденсирующийся газ сдувается паром и не оказывает значительного влияния на величину коэффициента теплоотдачи.

**Влияние компоновки поверхности нагрева.** При расчете конденсационных устройств необходимо решать вопрос о том, как лучше, с точки зрения теплоотдачи, располагать поверхности: вертикально или горизонтально. Для длинных труб, которые применяются на практике, вопрос решается в пользу горизонтального расположения, так как конденсат стекает быстрее, толщина пленки меньше, а  $\pm$  больше, чем для вертикально расположенных труб. Если горизонтально расположить трубы невозможно, то в целях интенсификации теплоотдачи на поверхностях труб устанавливаются конусные ребра. Конденсат, стекая с ребер, освобождает нижележащую поверхность трубы для процесса конденсации и, таким образом, толщина пленки конденсата по высоте трубы не увеличивается. Опыт [6] показывает, что монтаж таких ребер через каждые 10 см на трубе высотой 3 м увеличивает средний коэффициент теплоотдачи в 2...3 раза.

### 2.10.3. Теплоотдача при кипении жидкости на поверхности нагрева

Кипением называется процесс парообразования, происходящий при температуре кипения (насыщения) в толще жидкости. При этом

поглощается теплота фазового перехода, вследствие чего для поддержания процесса необходимо непрерывно подводить тепло, т. е. кипение связано с теплообменом. При кипении паровая фаза образуется в виде пузырей. В нагретой некипящей жидкости в отсутствие вынужденного течения теплота через пограничный слой передается свободной конвекцией и теплопроводностью. При кипении перенос массы вещества и теплоты из пограничного слоя в объем жидкости осуществляется еще и паровыми пузырьками, которые, всплывая, вызывают интенсивное перемешивание жидкости и турбулизацию пограничного слоя. Поскольку обычно подвод теплоты осуществляется через поверхность теплообмена, то и пузыри возникают на этой поверхности. Если поверхность погружена в большой объем жидкости, вынужденное движение которой отсутствует, то такой процесс называют кипением в большом объеме. В теплоэнергетике чаще всего встречаются процессы кипения на поверхности нагрева (поверхности труб, стенки котлов и т. п.).

**Режимы кипения.** Различают два режима кипения: пузырьковый режим, когда пар образуется на поверхности в виде отдельных периодически зарождающихся пузырьков, и пленочный режим кипения, когда количество пузырьков у поверхности становится настолько большое, что они сливаются в единую паровую пленку, через которую теплота от нагретой поверхности передается в объем жидкости теплопроводностью. Поскольку коэффициент теплопроводности пара примерно в 30 раз меньше такового для воды, то термическое сопротивление теплопроводности через паровую пленку резко возрастает, что может привести к пережогу поверхности теплообмена. Поэтому этот режим в теплоэнергетических установках не допускается.

**Условия, необходимые для возникновения процесса кипения.** Для возникновения кипения необходимо и достаточно два условия: наличие перегрева жидкости относительно температуры насыщения при давлении жидкости и наличие центров парообразования, в качестве которых могут выступать различные включения в жидкости (твердые частицы и пузырьки газов), а также углубления и впадины на поверхности теплообмена, что связано с шероховатостью.

Пусть жидкость находится в сосуде с обогреваемым дном (рис. 2.28).



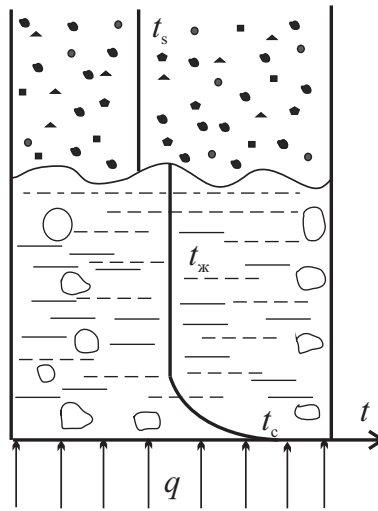


Рис. 2.28. Процесс кипения жидкости

Если жидкость кипит, то температура пара над жидкостью равна  $t_s$ . Температура в самой жидкости  $t_{ж}$  всегда несколько больше  $t_s$ . По мере приближения к обогреваемому дну температура  $t_{ж}$  практически не изменяется. Лишь в непосредственной близости от дна происходит ее резкое увеличение до  $t_c$ . Из рисунка следует, что наибольший перегрев ( $t_c - t_s$ ) наблюдается у поверхности теплообмена, здесь же вследствие шероховатости поверхности находятся и центры парообразования. Этим и объясняется, почему пузырьки образуются именно на поверхности теплообмена.

Для того чтобы пузырек развивался, т. е. увеличивался в объеме за счет испарения жидкости с поверхности пузырька внутрь него, давление пара в нем должно быть больше давления, обусловленного окружающей жидкостью и силой поверхностного натяжения.

Температура насыщения является функцией давления: чем больше давление, тем выше температура насыщения. Отсюда становится понятно, почему одним из условий возникновения кипения (образования пузырьков пара) является перегрев жидкости. Объем пузырька увеличивается до тех пор, пока подъемная сила, стремящаяся оторвать его, не будет больше сил, удерживающих его на поверхности. Размер пузырька в момент его отрыва характеризуется отрывным диаметром. Оторвавшийся пузырь перемещается вверх, продолжая увеличиваться в объеме. На поверхности раздела жидкость — пар пузырек лопается.

Поскольку пузыри возникают, растут и отрываются на поверхности теплообмена, то они тем самым разрушают пограничный слой, который создает основное термическое сопротивление теплоотдачи. Поэтому теплоотдача при кипении является высокоинтенсивным процессом. Для воды, например, коэффициент  $\alpha$  достигает  $(10 \dots 40) 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

В процессе кипения поверхность теплообмена контактирует частично с паровой, частично с жидкой фазой (см. рис. 2.28). Так как  $\lambda_{\text{ж}} \gg \lambda_{\text{пара}}$ , то теплота в основном передается жидкой среде, т. е. идет на ее нагрев и перегрев, а перегретая жидкость испаряется внутрь пузырей.

На рис. 2.29 приведена зависимость коэффициента  $\alpha$  от  $\Delta t = t_c - t_s$  (перегрева жидкости). Можно выделить следующие области кипения. При небольших температурных напорах  $\Delta t$  теплоотдача определяется в основном условиями свободной конвекции, так как количество образующихся пузырей небольшое и они не оказывают существенного воздействия на пограничный слой — это область конвективного кипения I. В этой области коэффициент теплоотдачи пропорционален  $\Delta t^{1/3}$ . С ростом перегрева жидкости все меньшая шероховатость может служить центрами парообразования, а это приводит к увеличению их числа, и, кроме того, увеличивается частота отрыва пузырей в каждом центре парообразования. Это вызывает усиление циркуляции в пограничном слое, вследствие чего теплоотдача резко возрастает. Наступает развитый пузырьковый режим кипения (область II). В этой области величина коэффициента теплоотдачи ( $\alpha$ ) пропорциональна  $\Delta t^2$ .

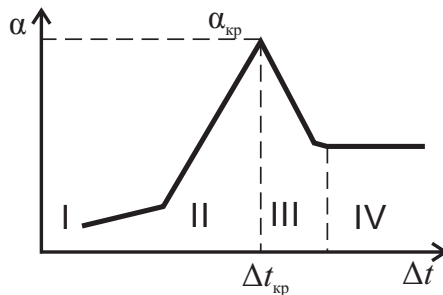


Рис. 2.29. Изменение коэффициента теплоотдачи в зависимости от величины перегрева жидкости

С дальнейшим ростом температурного напора ( $\Delta t$ ) число пузырей становится настолько большим, что они начинают сливаться, в результате чего все большая часть поверхности будет соприкасаться с паровой фазой, теплопроводность которой ниже, чем жидкости. Поэтому теплоотдача, достигнув максимума, начнет снижаться (переходный режим III) до тех пор, пока не образуется сплошная паровая пленка, отделяющая жидкость от поверхности нагрева. Такой режим кипения называется пленочным (область IV). В последнем случае коэффициент  $\alpha$  практически не зависит от  $\Delta t$ .

На рис. 2.30 представлена экспериментально полученная [6] зависимость коэффициента теплоотдачи от плотности теплового потока при кипении воды в большом объеме в условиях свободной конвекции.

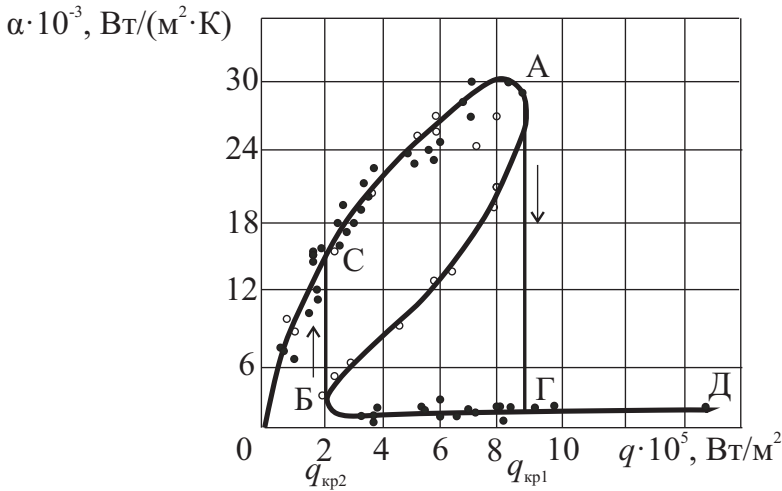


Рис. 2.30. Зависимость значения коэффициента теплоотдачи от величины плотности теплового потока

Из рис. 2.30 следует, что с увеличением плотности теплового потока коэффициент теплоотдачи возрастает (участок О—А). Этот участок соответствует пузырьковому режиму кипения. При достижении плотности теплового потока  $q_{кр1} = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$  коэффициент теплоотдачи резко уменьшается (линия А—Г) — пузырьковый режим сменяется пленочным. Участок Г—Д соответствует пленочному режиму. Явление перехода пузырькового режима кипения в пленочный называют первым кризисом кипения ( $q_{кр1}$ ). При переходе от пузырькового режима к пленочному значительно возрастает перепад температур  $\Delta t$ . Об-

ратный переход от пленочного к пузырьковому кипению происходит при плотности теплового потока  $q_{\text{кр}_2} = 2 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$  (линия Б—С), который примерно в 4 раза меньше  $q_{\text{кр}_1}$ . Явление перехода от пленочного кипения к пузырьковому называют вторым кризисом кипения ( $q_{\text{кр}_2}$ ). Участок кривой А—Б характеризует переходный режим, здесь могут сосуществовать одновременно и пузырьковый и пленочный режимы на различных частях поверхности нагрева.

**Расчетные формулы.** Чаще всего на практике реализуется пузырьковый режим кипения. Расчет среднего коэффициента теплоотдачи при этом режиме ведется с помощью эмпирических уравнений, так как, несмотря на многочисленность факторов, влияющих на процесс, величина  $\alpha$ , в конечном счете, зависит от физических свойств жидкости (последние связаны с давлением насыщения  $p_s$ ) и плотности теплового потока  $q$  (или  $\Delta t$ ). Для воды при давлении насыщения  $p_s = 1 \dots 40$  бар [3]:

$$\bar{\alpha} = 3,14 q^{0,7} p_s^{0,15} \text{ или } \bar{\alpha} = 45,4 \Delta t^{2,33} p_s^{0,5} \text{ или } \bar{\alpha} = \frac{3,14 p_s^{0,18}}{1 - 0,0045 p_s} q^{2/3}. \quad (2.109)$$

Последняя формула получена при  $p_s = 1 \dots 200$  бар. Приведенные формулы являются размерными, чтобы получить значение коэффициента теплоотдачи в  $[\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$ , необходимо подставлять  $p_s$  в бар, а  $q$  — в  $\text{Вт}/\text{м}^2$ .

### Примеры решения задач по теме «Теплообмен при фазовых превращениях»

**Пример 1.** Определить среднее значение коэффициента теплоотдачи со стороны конденсирующегося сухого насыщенного пара в горизонтальном кожухотрубном конденсаторе. Конденсация осуществляется водой, текущей по трубам наружным диаметром 21 мм. Число рядов труб по вертикали  $n = 7$ . Расположение труб шахматное. Температура пара  $179^\circ \text{C}$ , а средняя температура наружной поверхности труб —  $171^\circ \text{C}$ .

**Решение.** Среднее значение коэффициента теплоотдачи при конденсации сухого насыщенного пара на трубных пучках определяется

по формуле (2.108). Для расчета  $\bar{\alpha}_r = 0,728 \sqrt[4]{\frac{r g \rho_{\text{ж}}^2 \lambda_{\text{ж}}^3}{\mu_{\text{ж}} (t_s - t_c) d}}$  из П. 1, табл. П. 1.5 по определяющей температуре  $t_{\text{ж}} = \frac{t_s + t_c}{2} = 175^\circ\text{C}$  выпишем физические параметры конденсата:

$$\rho_{\text{ж}} = 892,1 \text{ кг/м}^3; \lambda_{\text{ж}} = 0,674 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \mu_{\text{ж}} = 158 \cdot 10^{-6} \text{ (Н} \cdot \text{с)/м}^2.$$

Значение скрытой теплоты парообразования определим из табл. П. 1.6 по  $t_s = 179^\circ\text{C}$ :

$$r = 2015,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг.}$$

$$\bar{\alpha}_r = 0,728 \sqrt[4]{\frac{2015,2 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 892,1^2 \cdot 0,674^3}{158 \cdot 10^{-6} (179 - 171) \cdot 21 \cdot 10^{-3}}} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

При расчете  $\bar{\alpha}_{\text{пучка}}$  в качестве  $n = 7/2 = 3,5$ , так как расположение труб шахматное,

$$\bar{\alpha}_{\text{пучка}} = \bar{\alpha}_r \frac{0,84}{n^{0,07}} = 1,5 \cdot 10^4 \frac{0,84}{3,5^{0,07}} = 1,13 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

**Пример 2.** Определить тепловой поток, подводимый к кипящей воде через поверхность  $F = 2 \text{ м}^2$  в паровом котле. Режим кипения воды на поверхности пузырьковый. Температура поверхности  $t_c = 150^\circ\text{C}$ . Давление насыщенного пара ( $p_s$ ) в котле 3,61 бар.

*Решение.* Тепловой поток определяется по формуле  $Q = \bar{\alpha} (t_c - t_s) F$ . Коэффициент теплоотдачи при пузырьковом режиме кипения воды на поверхности находится по формуле (2.109)  $\bar{\alpha} = 45,4 \Delta t^{2,33} p_s^{0,5}$ , где разность температур  $\Delta t = t_c - t_s$ .

По давлению  $p_s = 3,61 \text{ бар}$  из табл. П. 1.6 выпишем температуру насыщения,  $t_s = 140^\circ\text{C}$ .

$$\bar{\alpha} = 45,4 \Delta t^{2,33} p_s^{0,5} = 45,4 (150 - 140)^{2,33} \cdot 3,61^{0,5} = 18,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

$$Q = 18,4 \cdot 10^3 (150 - 140) 2 = 36,8 \cdot 10^4 \text{ Вт.}$$

## Глава 3

### ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

---

**И**злучением называется перенос тепла в пространстве путем электромагнитных волн. Солнце, находящееся на расстоянии примерно 150 миллионов километров от Земли, передает ей энергию исключительно излучением.

Как известно из физики, любое излучение представляет собой поток частиц, их называют фотонами. Энергия фотона зависит от его частоты. Фотоны с более высокими частотами обладают большей энергией, чем фотоны с более низкими частотами. При нагревании тела свободные электроны возбуждаются и могут переходить с более высокого энергетического уровня на более низкий, излучая при этом энергию в виде электромагнитных волн. Поскольку множество электронов совершают переходы на разные энергетические уровни, то энергия фотонов, покидающих поверхность тела (энергия излучения), распределяется по спектру частот. Это излучение называется тепловым излучением. Есть и другие способы, кроме нагревания поверхности, которые могут быть причиной испускания телом электромагнитных волн, но далее в работе будет рассматриваться только тепловое излучение.

Тепловое излучение, испускаемое с поверхности тела и определяемое только его температурой, сосредоточено между длинами волн  $8 \cdot 10^{-4} \dots 8 \cdot 10^{-7}$  м. Напомним, что длину волны электромагнитного излучения принято обозначать  $\lambda$  (не надо путать с коэффициентом теплопроводности, который обозначается так же).

Глаз человека воспринимает электромагнитное излучение в диапазоне длин волн приблизительно  $0,38 \cdot 10^{-6} \dots 0,76 \cdot 10^{-6}$  м, этот диапазон длин волн называется видимой частью спектра. Эта часть спектра лежит полностью внутри области теплового излучения.

### 3.1. Основные положения лучистого теплообмена

Процесс переноса теплоты в пространстве путем электромагнитных волн протекает следующим образом: часть внутренней энергии нагретого тела превращается в лучистую энергию и в виде электромагнитных волн распространяется по всем направлениям пространства. Достигнув других тел, электромагнитные волны частично поглощаются, их энергия снова превращается в теплоту. Следовательно, тела не только излучают, но и поглощают лучистую энергию. Поэтому говорят не просто об излучении, а о теплообмене излучением.

Большинство твердых и жидких тел излучают энергию во всем интервале длин волн от 0 до  $\infty$ , т. е. имеют сплошной спектр излучения. В отличие от них чистые металлы и газы излучают и поглощают энергию лишь в определенных интервалах длин волн. Этот процесс называют выборочным или селективным.

Твердые и жидкие тела обладают высокой поглощательной способностью. В процессе излучения и поглощения участвуют тонкие поверхностные слои. Такой процесс называют поверхностным. Для газов характерна низкая поглощательная способность. В излучении и поглощении участвуют все частицы объема газа. Такой процесс излучения (поглощения) называют объемным. Одно- и двухатомные газы практически не излучают и не поглощают энергию. Излучают и поглощают тепловую энергию только трех- и более атомные газы.

Излучение в большей степени, чем теплопроводность и конвекция, зависит от температуры и среды, а кроме того, может осуществляться и в вакууме.

**Виды тепловых потоков.** Для количественной характеристики переноса теплоты при поверхностном излучении применяются следующие величины.

Полный (интегральный) поток излучения  $Q$ , Вт, — это количество теплоты, излучаемое с поверхности тела  $F$  во всем диапазоне длин волн (от 0 до  $\infty$ ) и по всем направлениям полусферического пространства.

Поверхностная плотность (излучательная способность) потока излучения  $q$  или  $E$ , Вт/м<sup>2</sup>, — это лучистый поток с единицы поверхности тела:  $q = E = \frac{dQ}{dF}$ , отсюда  $Q = \int_F E dF$ . Если  $E = \text{const}$ ,  $Q = EF$ .

Спектральная плотность потока излучения  $E_\lambda$ , Вт/м<sup>3</sup>, представляет собой плотность потока излучения в бесконечно малом интервале длин волн:  $E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}$ , отсюда  $E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$ .

**Разновидности полусферического излучения.** Излучение, определяемое природой тела и его температурой, называется собственным: его обозначают  $Q$ ,  $q$ ,  $E$ ,  $E_\lambda$  и т. д.

Излучение, которое падает на данное тело со стороны других тел, называется падающим и обозначается как  $Q_{\text{пад}}$  или  $E_{\text{пад}}$ . Пусть на поверхность некоторого тела падает излучение, равное  $E_{\text{пад}}$  (рис. 3.1). В общем случае часть его отразится, часть поглотится, а часть пройдет сквозь тело. Тогда баланс энергий можно записать в виде

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}}. \quad (3.1)$$

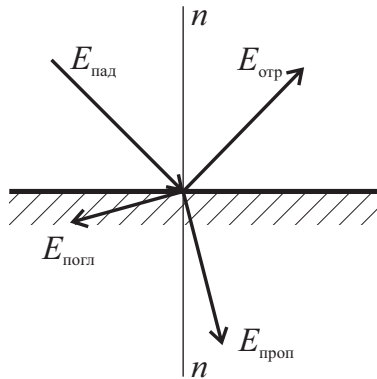


Рис. 3.1. Разновидности излучения

Разделив левую и правую части равенства на  $E_{\text{пад}}$ , получим

$$1 = \frac{E_{\text{погл}}}{E_{\text{пад}}} + \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} + \frac{E_{\text{проп}}}{E_{\text{пад}}}, \quad (3.2)$$

где  $\frac{E_{\text{погл}}}{E_{\text{пад}}} = A$  — коэффициент поглощения;  $\frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = R$  — коэффициент отражения;  $\frac{E_{\text{проп}}}{E_{\text{пад}}} = D$  — коэффициент пропускания. Тогда  $1 = A + R + D$ .



Если  $A = 1$ , т. е. вся падающая энергия поглощается, то тело называется абсолютно черным. Если  $R = 1$ , т. е. вся падающая энергия отражается, то тело называют абсолютно белым. Если  $D = 1$ , т. е. вся лучистая энергия проходит через тело, то его называют абсолютно прозрачным или диатермичным. Если  $A < 1$  и коэффициент поглощения не зависит от длины волны, то тело называется серым. Для твердых и жидких тел  $D = 0$ , поэтому при рассмотрении задач по теплообмену излучением между твердыми поверхностями будем считать

$$A + R = 1. \quad (3.3)$$

Сумма собственного и отраженного излучения называется эффективным излучением:

$$Q_{\text{эфф}} = Q + Q_{\text{отр}} = Q + RQ_{\text{пад}}, \quad E_{\text{эфф}} = E + E_{\text{отр}} = E + RE_{\text{пад}}. \quad (3.4)$$

Поскольку тела не только излучают энергию, но и поглощают энергию, падающую со стороны других тел, то необходимо знать результирующий поток теплоты. Результирующее излучение представляет собой разность между энергией, посылаемой телом в пространство (эффективным излучением) и падающей на него со стороны других тел:

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{эфф}} - Q_{\text{пад}}, \quad q_{\text{рез}} = E_{\text{рез}} = E_{\text{эфф}} - E_{\text{пад}}. \quad (3.5)$$

С учетом уравнения (3.4) выражение для  $q_{\text{рез}}$  переписывается следующим образом:

$$q_{\text{рез}} = E + RE_{\text{пад}} - E_{\text{пад}} = E - E_{\text{пад}}(1 - R).$$

Для непрозрачных тел  $(1 - R) = A$  [см. уравнение (3.3)], поэтому

$$q_{\text{рез}} = E - AE_{\text{пад}}. \quad (3.6)$$

Установим связь между  $E_{\text{эфф}}$ ,  $E$  и  $q_{\text{рез}}$ . Для этого из уравнения (3.5) получим

$$E_{\text{эфф}} = q_{\text{рез}} + E_{\text{пад}}, \quad (3.7)$$

а  $E_{\text{пад}}$  найдем из уравнения (3.6):

$$E_{\text{пад}} = \frac{E - q_{\text{рез}}}{A}. \quad (3.8)$$

После подстановки (3.8) в (3.7) получим

$$E_{\text{эфф}} = q_{\text{рез}} \left( 1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{E}{A}, \quad Q_{\text{эфф}} = Q_{\text{рез}} \left( 1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{Q}{A}. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) является важной формулой, используемой при расчете процессов теплообмена излучением.

### 3.2. Законы теплового излучения

Рассматриваемые ниже законы получены для абсолютно черного тела при равновесном излучении, когда все тела, входящие в систему, имеют одинаковую температуру [1].

**Закон Планка.** Устанавливает зависимость спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела ( $E_{0\lambda}$ ) от температуры  $T$  и длины волны  $\lambda$  (рис. 3.2). Из рисунка следует, что все изотермы проходят через максимум. При  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  интенсивность излучения стремится к нулю. Максимальное значение спектральной плотности потока излучения с повышением температуры увеличивается и смещается в область более коротких длин волн.

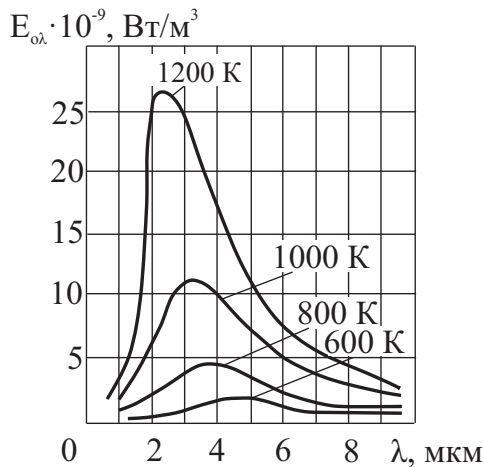


Рис. 3.2. Зависимость спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела от температуры и длины волны

**Закон Стефана — Больцмана.** Устанавливает связь плотности потока излучения и температуры тела. Согласно закону Стефана — Больцмана, плотность потока излучения абсолютно черного тела пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени.

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \text{ где } \sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (3.10)$$

Если  $10^{-8}$  представить, как  $\left(\frac{1}{100}\right)^4$ , то выражение (3.10) запишется как

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4, \quad Q_0 = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 F, \quad (3.11)$$

где  $C_0 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ . — коэффициент излучения абсолютно черного тела. Закон Стефана — Больцмана распространяют и на серые тела:

$$E = C \left(\frac{T}{100}\right)^4, \quad (3.12)$$

где  $C$  — коэффициент излучения серого тела, причем  $C < C_0$ . Отношение  $\frac{E}{E_0} = \varepsilon$  называется степенью черноты поверхности тела.

Закон Стефана — Больцмана для серого тела запишется в виде

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4, \quad Q = \mu C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 F. \quad (3.13)$$

Сопоставляя (3.12) и (3.13), заметим, что  $C = C_0 \cdot \varepsilon$ .

Степень черноты поверхности излучения различных материалов приведена в П. 4.

**Закон Кирхгофа.** Устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностями серого и абсолютно черного тела.

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \dots = \frac{E_0}{A_0} = E_0 = f(T), \quad (3.14)$$

Согласно закону Кирхгофа отношение плотности потока излучения какого-либо тела к его коэффициенту поглощения при данной температуре не зависит от природы тела и равно плотности потока излучения абсолютно черного тела при той же температуре:  $\frac{E}{A} = E_0$ , откуда

$$E = E_0 A. \quad (3.15)$$

Сравнивая (3.15) и (3.13), делаем вывод, что

$$\varepsilon = A, \quad (3.16)$$

т. е. при равновесном излучении степень черноты поверхности тела численно равняется коэффициенту поглощения. Равновесное излучение — это излучение тел, имеющих одинаковую температуру.

**Закон косинусов Ламберта.** Плотность потока излучения в пределах элементарного телесного угла  $d\omega$  в направлении угла  $\psi$  (рис. 3.3) равна плотности потока излучения в пределах телесного угла  $d\omega$  в направлении нормали, умноженной на косинус этого угла  $\psi$ .

$$dE_{\psi} = dE_n \cos \psi.$$

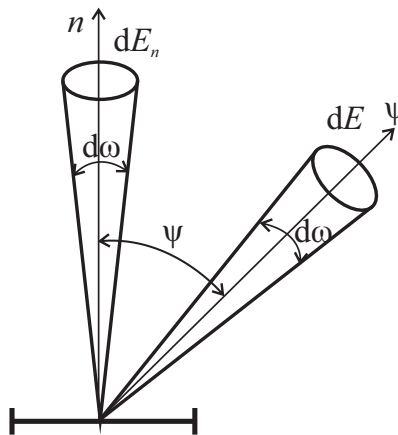


Рис. 3.3. Излучательная способность по нормали к поверхности и под углом  $\psi$  к ней

### 3.3. Теплообмен излучением между двумя телами с плоскопараллельными поверхностями

При решении задач приняты следующие допущения: все тела, входящие в систему, подчиняются закону Ламберта; тела непрозрачные ( $D = 0$ ); теплота передается только излучением и, поглощаясь, переходит во внутреннюю энергию тела; поверхности тел изотермичные;

коэффициент поглощения ( $A$ ) и степень черноты ( $\epsilon$ ) тела не зависят от температуры.

**Постановка задачи.** Рассмотрим два тела с плоскопараллельными поверхностями (рис. 3.4).

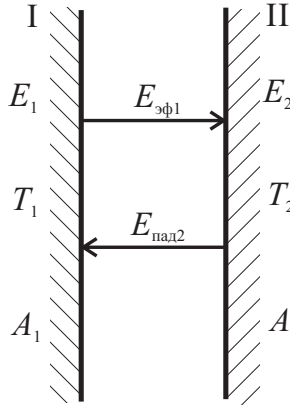


Рис. 3.4. Излучение между телами с плоскопараллельными поверхностями

Для первого и второго тела известны: поверхностная плотность теплового потока  $E$ , температура  $T$ , коэффициент поглощения  $A$  и степень черноты поверхности  $\epsilon$  (соответственно  $A_1$ ,  $E_1$ ,  $T_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $T_2$ ,  $A_2$ ,  $E_2$ ,  $\epsilon_2$ ). Для определенности считаем, что  $T_1 > T_2$ . Задача стационарная, температуры во времени остаются неизменными. Требуется найти результирующую плотность теплового потока, передаваемого излучением с первого тела на второе:  $q_{рез} = q_{1-2}$ .

Согласно (3.6),  $q_{рез} = q_{1-2} = E_{эф1} - E_{пад}$ . Поскольку вся энергия излучения со второго тела обязательно достигнет первого, то  $E_{пад2} = E_{эф2}$ , поэтому

$$q_{1-2} = E_{эф1} - E_{эф2}. \quad (3.17)$$

На основании уравнения (3.9):

$$E_{эф1} = q_{1-2} \left( 1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1},$$

$$E_{эф2} = q_{2-1} \left( 1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{E_2}{A_2}.$$

Тогда уравнение (3.17) можно переписать в виде

$$q_{1-2} = q_{1-2} \left( 1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1} - q_{2-1} \left( 1 - \frac{1}{A_2} \right) - \frac{E_2}{A_2}. \quad (3.18)$$

При стационарном режиме  $q_{1-2} = -q_{2-1}$ . Учитывая это соотношение, из уравнения (3.18) можно получить

$$q_{1-2} = \frac{\frac{E_1}{A_1} - \frac{E_2}{A_2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (3.19)$$

Из закона Стефана — Больцмана следует

$$E_1 = \varepsilon_1 C_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4, \quad E_2 = \varepsilon_2 C_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4,$$

а согласно (3.16)  $\varepsilon_1 = A_1$ ,  $\varepsilon_2 = A_2$ , поэтому окончательно формула (3.19) будет иметь вид

$$q_{1-2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad Q_{1-2} = q_{1-2} \cdot F, \quad (3.20)$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$  — приведенная степень черноты.

### **3.4. Теплообмен излучением между двумя телами с плоскопараллельными поверхностями при наличии между ними экрана**

Уменьшить тепловой поток, который передается с поверхности одного тела на другое, можно путем постановки между телами экрана.

**Постановка задачи.** Пусть между телами I и II установлен плоский экран со степенью черноты  $\varepsilon_3$ , температура которого  $T_3$  (рис. 3.5).

Решаем задачу при условии, что степени черноты поверхностей тел и экрана одинаковые ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ). Температура первого тела боль-

ше температуры второго тела ( $T_1 > T_2$ ). Задача стационарная, т. е. во времени температуры не изменяются. Требуется найти результирующую плотность теплового потока, передаваемого с первого тела на второе при наличии между ними экрана  $q_{(1-2)\text{э}}$ .

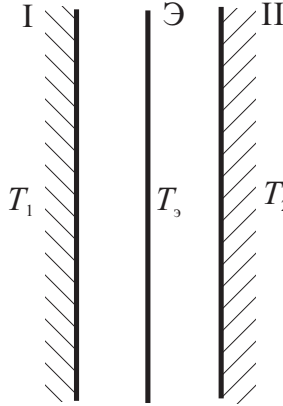


Рис. 3.5. Два тела с плоскопараллельными поверхностями и экран между ними

Результирующий тепловой поток между первым телом и экраном определится по формуле (3.20):

$$q_{1-\text{э}} = \varepsilon_{\text{пр}_1} C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{э}}}{100} \right)^4 \right], \quad \varepsilon_{\text{пр}_1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} - 1}. \quad (3.21)$$

С поверхности экрана тепловой поток будет передаваться на второе тело:

$$q_{\text{э}-2} = \varepsilon_{\text{пр}_2} C_0 \left[ \left( \frac{T_{\text{э}}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad \varepsilon_{\text{пр}_2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (3.22)$$

Поскольку по условию задачи степени черноты поверхностей и экрана одинаковые, следовательно:

$$\varepsilon_{\text{пр}_1} = \varepsilon_{\text{пр}_2} = \varepsilon_{\text{пр}}. \quad (3.23)$$

При установившемся (стационарном) режиме

$$q_{1-\text{э}} = q_{\text{э}-2} = q_{(1-2)\text{э}}. \quad (3.24)$$

Тогда, приравнивая правые части уравнений (3.21) и (3.22), можно найти температуру экрана:

$$\left(\frac{T_{\text{э}}}{100}\right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right].$$

Подставляя это выражение, например в уравнение (3.21) и учитывая равенство (3.24), получаем

$$q_{(1-2)\text{э}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \quad Q_{(1-2)\text{э}} = q_{(1-2)\text{э}} F. \quad (3.25)$$

Сравнивая уравнения (3.20) и (3.25), делаем вывод, что при равенстве степеней черноты поверхностей тел и экрана  $q_{(1-2)\text{э}} = 0,5 q_{1-2}$ , т.е. при наличии одного экрана тепловой поток уменьшается в 2 раза. Если  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_{\text{э}}$ , то формула (3.25) будет иметь вид

$$Q_{(1-2)\text{э}} = \frac{\varepsilon_{\text{э-1}} \cdot \varepsilon_{\text{э-2}}}{\varepsilon_{\text{э-1}} + \varepsilon_{\text{э-2}}} C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] F, \quad (3.26)$$

$$\text{где } \varepsilon_{\text{э-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1}, \quad \varepsilon_{\text{э-2}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

### 3.5. Теплообмен излучением между телом и его оболочкой

Рассмотрим самый общий случай теплообмена излучением между двумя телами, когда одно тело заключено внутри другого (например, отопительная батарея находится внутри комнаты).

**Постановка задачи.** Пусть тело I находится внутри оболочки другого тела II (рис. 3.6).

Для тела I известно:  $Q_1, A_1, T_1, F_1, \varepsilon_1$ , а для второго тела:  $Q_2, A_2, T_2, F_2, \varepsilon_2$ . Задача стационарная. Пусть  $T_1 > T_2$ . Необходимо определить  $Q_{1-2}$ .

Согласно определению

$$Q_{1-2} = Q_{\text{эфф}1} - Q_{\text{пад}2}, \quad (3.27)$$



где  $Q_{\text{пад}_2}$  — падающее тепловое излучение со второго тела на первое.

В отличие от ранее рассмотренного случая, не все лучи со второго тела достигнут первого, часть из них пройдет мимо. Поэтому

$$Q_{\text{пад}_2} \neq Q_{\text{эф}\Phi_2}. \quad (3.28)$$

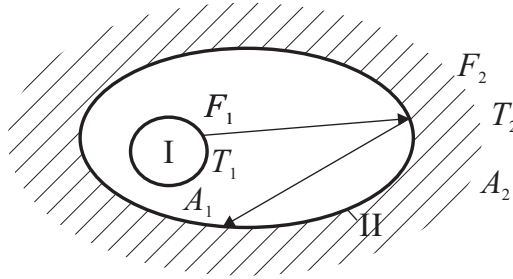


Рис. 3.6. Тело (I) и его оболочка (II)

Введем некоторый коэффициент  $\bar{\varphi}_{2-1}$  так, чтобы

$$Q_{\text{пад}_2} = \bar{\varphi}_{2-1} Q_{\text{эф}\Phi_2}. \quad (3.29)$$

Коэффициент  $\bar{\varphi}_{2-1}$  характеризует долю излучения второго тела, которое падает на первое, и называется средним угловым коэффициентом излучения. Тогда уравнение (3.27) можно записать в виде

$$Q_{1-2} = Q_{\text{эф}\Phi_1} - \bar{\varphi}_{2-1} Q_{\text{эф}\Phi_2}, \quad (3.30)$$

где, согласно соотношению (3.9),

$$\begin{aligned} Q_{\text{эф}\Phi_1} &= Q_{1-2} \left( 1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{Q_1}{A_1}, \\ Q_{\text{эф}\Phi_2} &= Q_{1-2} \left( 1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{Q_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставляя выражения (3.31) в уравнение (3.30) и учитывая, что при стационарном режиме  $Q_{1-2} = -Q_{2-1}$ , получаем

$$Q_{1-2} = \frac{\frac{Q_1}{A_1} - \bar{\varphi}_{2-1} \frac{Q_2}{A_2}}{\frac{1}{A_1} + \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right) \bar{\varphi}_{2-1}}. \quad (3.32)$$

Используя закон Стефана — Больцмана и следствие из закона Кирхгофа (3.16), запишем

$$Q_1 = \varepsilon_1 C_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 F_1, \quad Q_2 = \varepsilon_2 C_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 F_2,$$

где  $\varepsilon_1 = A_1$ ,  $\varepsilon_2 = A_2$ .

Тогда уравнение (3.32) будет иметь вид

$$Q_{1-2} = \frac{C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 - \bar{\Phi}_{2-1} \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \bar{\Phi}_{2-1}}. \quad (3.33)$$

Определим средний угловой коэффициент излучения. Для этого предположим, что  $T_1 = T_2$ , тогда  $Q_{1-2} = 0$ . Это возможно, если числитель формулы (3.33) равен нулю. Поскольку  $C_0$  не равняется нулю, значит,

$$\left( \frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 - \bar{\Phi}_{2-1} \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 = 0.$$

Отсюда

$$\bar{\Phi}_{2-1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (3.34)$$

Окончательно формула для теплообмена излучением между телом и оболочкой примет вид

$$Q_{1-2} = \frac{C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (3.35)$$

**Частные случаи.** Рассмотрим следующие два частных случая:

1. Если  $F_1 = F_2$ , то  $\bar{\Phi}_{2-1} = \frac{F_1}{F_2} = 1$ .

$$\text{Тогда } Q_{1-2} = \frac{C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

Полученная формула ничем не отличается от (3.20) для случая теплообмена между двумя телами с плоскопараллельными поверхностями.

2. Если  $F_1 \ll F_2$ , то  $\bar{\Phi}_{2-1} = \frac{F_1}{F_2} \approx 0$ .

В этом случае формула (3.35) упростится и примет вид

$$Q_{1-2} = \varepsilon_1 C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1. \quad (3.36)$$

### 3.6. Излучение газов и паров

Как уже говорилось в начале этой главы, газы излучают или поглощают энергию всем своим объемом. Поэтому поглощательная способность газов зависит от плотности и толщины газового слоя: чем больше плотность и толщина слоя газа, тем больше его поглощательная способность.

Одно- и двухатомные газы практически не излучают и не поглощают энергию, т. е. они прозрачны для теплового излучения, для них коэффициент проницаемости  $D \approx 1$ . Излучают и поглощают тепловую энергию только трех- и более атомные газы, например водяные пары ( $H_2O$ ) и углекислый газ ( $CO_2$ ). Эти газы чаще других встречаются в практике, так как являются одними из основных компонентов дымовых газов.

Излучение (поглощение) газов носит избирательный характер [1]. Они излучают (поглощают) энергию только определенных длин волн. Так, для углекислого газа ( $CO_2$ ) выделяют три основные полосы поглощения, мм:  $\lambda = (2,65 \dots 2,80)10^{-3}$ ;  $\lambda = (4,15 \dots 4,45)10^{-3}$ ;  $\lambda = (13 \dots 17)10^{-3}$ , а для водяного пара ( $H_2O$ ) — четыре полосы поглощения в интервалах длин волн:  $\lambda = (1,7 \dots 2)10^{-3}$ ;  $\lambda = (2,3 \dots 3,4)10^{-3}$ ;  $\lambda = (4,4 \dots 8,5)10^{-3}$ ;  $\lambda = (12 \dots 30)10^{-3}$ .

Как следует из приведенных данных, для водяных паров полосы излучения (поглощения) шире, чем для  $CO_2$ , т. е. поглощательная способность и степень черноты  $H_2O$  выше, чем для  $CO_2$ . Часть полос поглощения этих газов совпадает.

Опытным путем найдены соотношения для расчета излучательной способности  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ :

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5(p_{\text{CO}_2} l)^{0,33} \left( \frac{T}{100} \right)^{3,5}, \quad (3.37)$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 p_{\text{H}_2\text{O}}^{0,8} l^{0,6} \left( \frac{T}{100} \right)^{3,0}, \quad (3.38)$$

где  $p_{\text{CO}_2}$ ,  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  — соответственно парциальное давление углекислого газа и водяного пара в смеси;  $l$  — толщина слоя газа (длина хода луча).

Степени черноты углекислого газа и водяных паров так же, как излучательная способность этих газов, являются функциями  $pl$  и  $T$ :  $\varepsilon = f(pl, T)$  и определяются по номограммам. В П. 5, рис. П. 5.1, П. 5.2 приведены номограммы для степени черноты  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ . Как следует из (3.38), для  $\text{H}_2\text{O}$  влияние  $p$  несколько сильнее, чем  $l$ , поэтому найденное по номограммам значение  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  необходимо умножить на поправочный коэффициент  $\beta$ , который определяется по номограмме П. 5, рис. П. 5.3).

Степень черноты смеси газов определится по уравнению

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} \beta - \Delta\varepsilon_r, \quad (3.39)$$

где  $\Delta\varepsilon_r$  — поправка, учитывающая, что часть полос излучения этих газов совпадает. Величина этой поправки определяется по номограммам (П. 5, рис. П. 5.4), а значения  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$ ,  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  берутся из П. 5, рис. П. 5.1, П. 5.2 по средней температуре газа.

### 3.7. Теплообмен между газовой средой и поверхностью

В инженерной практике достаточно часто теплообменные поверхности располагают в дымоходах в целях использования теплоты дымовых газов, выбрасываемых в окружающую среду. Происходит теплообмен между поверхностью и газом.

Теплоту, которая передается от газа, содержащего  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ , поверхности, можно определить по эмпирической формуле [1]:

$$Q_{r-c} = \varepsilon'_c C_0 \left[ \varepsilon_r \left( \frac{\bar{T}_r}{100} \right)^4 - A_r \left( \frac{\bar{T}_c}{100} \right)^4 \right] F_c, \quad (3.40)$$

где  $\varepsilon'_c$  — эффективная степень черноты поверхности,  $\varepsilon'_c = 0,5(\varepsilon_c + 1)$ .

Наличие излучающего газа повышает степень черноты поверхности стенки по сравнению с ее степенью черноты при излучении через прозрачную среду ( $\varepsilon'_c > \varepsilon_c$ ). Поглощательная способность газа —  $A_t$  определяется по формуле

$$A_t = A_{\text{CO}_2} + A_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta A_t, \quad (3.41)$$

где  $A_{\text{CO}_2} = \varepsilon_{\text{CO}_2} \left( \frac{\bar{T}_r}{T_c} \right)^{0,65}$ ,  $A_{\text{H}_2\text{O}} = \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $\Delta A_t = \Delta \varepsilon_r$ . В этих формулах значения  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$  и  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  находятся из номограмм П. 5, рис. П. 5.1, П. 5.2 по средней температуре стенки. Приближенно средняя длина пути луча определяется из соотношения [1]:

$$l = 3,6 \frac{V}{F}, \quad (3.42)$$

где  $V$  — объем газового слоя,  $F$  — площадь поверхности стенки, ограничивающей газовый слой. Если теплообмен идет между газовой средой и пучком труб, то длина хода луча определяется по следующим формулам:

$$l = \left( 1,87 \frac{S_1 + S_2}{d} - 4,1 \right) d, \text{ если } \frac{S_1 + S_2}{d} \leq 7; \quad (3.43)$$

$$l = \left( 2,82 \frac{S_1 + S_2}{d} - 10,6 \right) d, \text{ если } 7 < \frac{S_1 + S_2}{d} < 13. \quad (3.44)$$

В формулах (3.43) и (3.44)  $S_1$ ,  $S_2$  — соответственно продольный и поперечный шаги пучка;  $d$  — наружный диаметр трубы, м.

### 3.8. Сложный процесс теплообмена

Напомним, что в окружающем нас мире теплота может передаваться теплопроводностью, конвекцией и излучением. Выше были рассмотрены закономерности переноса теплоты отдельно каждым способом. В технических устройствах очень часто теплота от поверхности теплообмена передается одновременно и конвекцией, и излучением. Ранее нами рассматривался теплообмен при свободной конвекции в ограниченном пространстве (2.9.6), в котором теплота одновременно передается теплопроводностью и конвекцией. Совместный пере-

нос теплоты сразу двумя или всеми тремя способами является сложным процессом теплообмена.

В качестве примера рассмотрим стационарный процесс переноса теплоты от поверхности отопительной батареи, расположенной в помещении. Тепловой поток от отопительной батареи передается свободной конвекцией  $Q_k$  и излучением  $Q_l$ :

$$Q = Q_k + Q_l. \quad (3.45)$$

Этот же тепловой поток можно рассчитать по уравнению теплоотдачи

$$Q = \alpha_{\text{сум}} (t_c - t_{\text{ж}}) F, \quad (3.46)$$

где  $\alpha_{\text{сум}}$  — сумма коэффициентов теплоотдачи конвекцией  $\alpha_k$  и излучением  $\alpha_l$ ,

$$\alpha_{\text{сум}} = \alpha_k + \alpha_l. \quad (3.47)$$

Рассмотрим пример сложного теплообмена.

**Пример.** Плоская поверхность отопительной батареи высотой  $h = 0,5$  м и шириной  $b = 1$  м, имеющая температуру  $60^\circ\text{C}$ , расположена в помещении, температура воздуха и стен в котором  $20^\circ\text{C}$ . Определить тепловой поток, передаваемый от поверхности батареи излучением и свободной конвекцией. Поверхность батареи покрыта масляной краской.

*Решение.* Тепловой поток определится как сумма тепловых потоков конвекцией ( $Q_k$ ) и излучением ( $Q_l$ ):

$$Q = Q_k + Q_l.$$

Определим тепловой поток, который передается за счет свободной конвекции (см. раздел 2.9):

$$Q_k = \alpha (t_c - t_{\text{ж}}) F.$$

Вычислим коэффициент теплоотдачи, для чего сначала определяем режим движения воздуха вдоль вертикальной стенки батареи. При свободной конвекции режим определяется по величине  $(Gr_{\text{ж},h} \cdot Pr_{\text{ж}})$ . По определяющей температуре  $t_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$  из П. 1, табл. П. 1.2 выписываем следующие значения:  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;

$Pr = 0,703$ . По температуре  $t_c = 60^\circ\text{C}$  из этой же таблицы выписываем значение  $Pr_c = 0,696$ . Определяющим размером является высота  $h = 1$  м.

$$Gr_{ж,h} = \frac{g\beta(t_c - t_{ж})h^3}{\nu^2}, \text{ где } \beta = \frac{1}{T_{ж}} = \frac{1}{293}, \frac{1}{\text{K}}.$$

$$Gr_{ж,h} = \frac{9,81(60 - 20)0,5^3}{293(15,06 \cdot 10^{-6})^2} = 0,74 \cdot 10^9.$$

$$Gr_{ж,h} Pr_{ж} = 0,74 \cdot 10^9 \cdot 0,703 = 0,52 \cdot 10^9 < 10^9,$$

значит, режим ламинарный. Согласно (2.85)

$$\overline{Nu}_{ж,h} = 0,75 (Gr_{ж,h} Pr_{ж})^{0,25} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Поскольку  $Pr_c \approx Pr_{ж}$ , то  $(Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25} \approx 1$ .  $\overline{Nu} = 0,75 (0,52 \cdot 10^9)^{0,25} = 151$ .

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{\alpha}h}{\lambda} \rightarrow \overline{\alpha} = \frac{\overline{Nu}\lambda}{h} = \frac{151 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 7,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}).$$

Тогда

$$Q_k = 7,82(60 - 20)(0,5 \cdot 1) = 156 \text{ Вт}.$$

Тепловой поток, который передается излучением, определим по (3.36), поскольку  $F_1 \ll F_2$ ,  $\overline{\Phi}_{2-1} = \frac{F_1}{F_2} \approx 0$ :

$$Q_l = \varepsilon_1 C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{стен}}{100} \right)^4 \right] F_1.$$

Из П. 4 выписываем величину степени черноты поверхности батареи, покрашенной масляной краской,  $\varepsilon_1 = 0,92$ .

$$Q_l = 5,67 \cdot 0,92 \left[ \left( \frac{333}{100} \right)^4 - \left( \frac{293}{100} \right)^4 \right] (1 \cdot 0,5) = 128 \text{ Вт}.$$

Тогда

$$Q = Q_k + Q_l = 156 + 128 = 284 \text{ Вт}.$$

Определим этот же тепловой поток по уравнению теплоотдачи  $Q = \alpha_{\text{сум}}(t_c - t_{ж})F$ . Вычислим  $\alpha_{\text{сум}} = \alpha_k + \alpha_l$ . Здесь неизвестна величина  $\alpha_l$ . Найдем значение  $\alpha_l$  из формулы

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{(t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}) F} = \frac{128}{(60 - 20)(0,5 \cdot 1)} = 6,4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Тогда

$$\alpha_{\text{сум}} = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{л}} = 7,8 + 6,4 = 14,2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

$$Q = \alpha_{\text{сум}} (t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}) F = 14,2(60 - 20)(0,5 \cdot 1) = 284 \text{ Вт}.$$

### Примеры решения задач на теплообмен излучением и сложный теплообмен

**Пример 1.** Определить тепловой поток, передаваемый излучением с поверхности нагревательного элемента, выполненного из окисленного железа. Температура поверхности элемента  $57^\circ\text{C}$ , а его площадь  $0,25 \text{ м}^2$ . Нагреватель находится в помещении, температура стен которого  $17^\circ\text{C}$ , а площадь поверхности  $50 \text{ м}^2$ .

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся формулой (3.35). Так как поверхность нагревателя много меньше, чем площадь поверхности стен помещения ( $F_1 \ll F_2$ ), то формула упростится и будет иметь вид:

$$Q = \varepsilon_1 C_0 \left[ \left( \frac{T_{\text{с}_1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{с}_2}}{100} \right)^4 \right] F_1.$$

Из П. 4 выпишем значение степени черноты поверхности, выполненной из окисленного железа:  $\varepsilon_1 = 0,736$ . Значения температуры стен переведем в градусы Кельвина и подставим в формулу, получим

$$Q = 0,736 \cdot 5,67 \left[ \left( \frac{330}{100} \right)^4 - \left( \frac{290}{100} \right)^4 \right] 0,25 = 50 \text{ Вт}.$$

**Пример 2.** Чугунная печь-камин установлена в помещении, стены которого деревянные. Тепловая мощность печи  $500 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . Во время топки стенки печи нагреваются до  $157^\circ\text{C}$ . Определить температуру деревянной стены, расположенной параллельно стенке печи. Чему будет равна температура деревянной стены, если между ней и стенкой топки поставить экран из гладкого окисленного железа.



**Решение.** Из П. 4 выпишем значения степени черноты чугуна, дерева и окисленного железа: 0,70; 0,88 и 0,82 соответственно. Определим температуру деревянной стены в отсутствие экрана. Для этого воспользуемся формулой (4.20)  $q_{1-2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$ , из которой найдем температуру деревянной стены, предварительно рассчитав значение приведенной степени черноты материалов чугуна и дерева:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0,70} + \frac{1}{0,88} - 1} = 0,64.$$

$$\left( \frac{T_2}{100} \right)^4 = \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{q_{1-2}}{\varepsilon_{\text{пр}} C_0} = \left( \frac{430}{100} \right)^4 - \frac{500}{5,67 \cdot 0,64} = 204.$$

Откуда  $T_2 = 378 \text{ К}$ , или  $105^\circ\text{С}$ .

Для расчета температуры деревянной стены при наличии экрана воспользуемся формулой (3.26)

$$q_{(1-2)\text{э}} = \frac{\varepsilon_{\text{э-1}} \cdot \varepsilon_{\text{э-2}}}{\varepsilon_{\text{э-1}} + \varepsilon_{\text{э-2}}} C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

В этой формуле

$$\varepsilon_{\text{э-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,82} - 1} = 0,61,$$

$$\varepsilon_{\text{э-2}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{э}}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0,82} + \frac{1}{0,88} - 1} = 0,74.$$

Выражение  $\frac{\varepsilon_{\text{э-1}} \cdot \varepsilon_{\text{э-2}}}{\varepsilon_{\text{э-1}} + \varepsilon_{\text{э-2}}} = \frac{0,61 \cdot 0,74}{0,61 + 0,74} = 0,33.$

$$\left( \frac{T_2}{100} \right)^4 = \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{q_{1-2}}{\varepsilon_{\text{пр}} C_0} = \left( \frac{430}{100} \right)^4 - \frac{500}{5,67 \cdot 0,33} = 75.$$

Откуда температура деревянной стены  $T_2 = 294 \text{ К}$  или  $21^\circ\text{С}$ .

**Пример 3.** По трубе внутренним диаметром 26 мм движутся дымовые газы. Давление газов 2 бара. Скорость движения 12 м/с. Дымовые газы представляют собой смесь водяного пара, углекислого газа и азо-

та. Мольная доля водяных паров в смеси составляет 0,11, мольная доля углекислого газа — 0,26, мольная доля азота — 0,76. Температура газа на входе в трубу 340 °С, на выходе из трубы — 280 °С. Средняя температура стенки трубы 270 °С. Определить плотность теплового потока, передаваемого от дымовых газов к стенке трубы. Степень черноты материала трубы  $\epsilon_c = 0,82$ .

*Решение.* Плотность теплового потока определится как сумма плотностей тепловых потоков, передаваемых конвекцией ( $q_k$ ) и излучением ( $q_l$ ):  $q = q_k + q_l$ .

Определим плотность теплового потока, который передается за счет конвекции:  $q_k = \bar{\alpha}(\bar{t}_ж - \bar{t}_c)$ .

В данной задаче имеет место вынужденное движение жидкости (дымовых газов) в трубе. Определим режим движения жидкости. Для этого рассчитаем значение безразмерного числа Рейнольдса:  $Re = \frac{wd_1}{\nu}$ .

По определяющей температуре, а в данном случае это средняя температура газа  $\bar{t}_ж = \frac{340 + 280}{2} = 320$  °С, из П. 1, табл. П. 1.3 выписываем значения физических параметров дымовых газов, используя линейную интерполяцию:  $\nu = 48,72 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 5,01 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К);  $Pr_ж = 0,65$ ,  $Pr_c$  определяется из этой же таблицы по  $t_c$ :  $Pr_c = 0,66$ .

$$Re_ж = \frac{wd_1}{\nu} = \frac{12 \cdot 26 \cdot 10^{-3}}{48,72 \cdot 10^{-6}} = 6404.$$

При вынужденном движении жидкости в трубе установлено, что при  $Re < 2300$  режим движения жидкости ламинарный, при  $Re \geq 10^4$  — турбулентный. Диапазон изменения  $Re$  от 2300 до  $10^4$  соответствует переходному режиму течения.

Воспользуемся формулой (2.62) для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при переходном режиме движения и определим значение безразмерного числа Нуссельта ( $Nu$ ):  $\overline{Nu} = A Pr_ж^{0,43} \left( \frac{Pr_ж}{Pr_c} \right)^{0,25}$ , где  $A = f(Re_{ж,d})$ . Согласно (2.62), если  $6000 \leq Re_{ж,d} < 10^4$ , то  $A = 30$ .

Для газов значения  $Pr$  мало зависят от температуры, поэтому при расчетах  $\left( \frac{Pr_ж}{Pr_c} \right)^{0,25} \approx 1$ .  $\overline{Nu} = 30 Pr_ж^{0,43} \left( \frac{Pr_ж}{Pr_c} \right)^{0,25} = 30 \cdot 0,65^{0,43} \cdot 1 = 26,9$ . По най-

денному значению Нуссельта рассчитываем величину коэффициента теплоотдачи

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} d_1}{\lambda} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\overline{\text{Nu}} \lambda}{d_1} = \frac{26,9 \cdot 5,01 \cdot 10^{-2}}{0,026} = 51,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}).$$

Определим плотность теплового потока, который передается за счет вынужденной конвекции

$$q_k = \bar{\alpha} (\bar{t}_{\text{жс}} - \bar{t}_c) = 51,8 \cdot (310 - 270) = 2072 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Определим плотность теплового потока ( $q_{\text{л}} = q_{\text{г-с}}$ ), который передается излучением от дымовых газов к стене трубы по формуле (3.40)

$$q_{\text{г-с}} = \epsilon'_c C_0 \left[ \epsilon_{\text{г}} \left( \frac{\bar{T}_{\text{г}}}{100} \right)^4 - A_{\text{г}} \left( \frac{\bar{T}_{\text{с}}}{100} \right)^4 \right], \text{ в которой эффективная степень чер-}$$

ноты материала трубы:  $\epsilon'_c = 0,5(\epsilon_c + 1) = 0,5(0,82 + 1) = 0,91$ .

Степень черноты смеси газов и их поглощательная способность определяются по формулам (3.39) и (3.41) соответственно.

Вычислим значение степени черноты смеси газов  $\epsilon_{\text{г}} = \epsilon_{\text{CO}_2} + \epsilon_{\text{H}_2\text{O}} \beta$ . Поправкой  $\Delta \epsilon_{\text{г}}$  вследствие ее малости пренебрегаем. Значения  $\epsilon_{\text{CO}_2} = f(p_{\text{CO}_2} \cdot l)$ ,  $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}} = f(p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l)$  определяются по номограммам по средней температуре газа. Определим парциальное давление водяного пара и углекислого газа в смеси. Из термодинамики известно, что парциальное давление определяется по формуле  $p_i = r_i \cdot P$ , где  $r_i$  — мольная доля компонента в смеси,  $P$  — давление смеси.  $p_{\text{H}_2\text{O}} = r_{\text{H}_2\text{O}} \cdot P = 0,11 \cdot 2 = 0,22$  бар;  $p_{\text{CO}_2} = r_{\text{CO}_2} \cdot P = 0,13 \cdot 2 = 0,26$  бар. Найдем длину хода луча (3.42):  $l = 3,6 \frac{V}{F} = 3,6 \frac{\pi R^2 h}{2 \pi R h} = \frac{3,6 \cdot 13 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,0234$  м.

Произведение парциального давления на длину луча:

$$p_{\text{CO}_2} l = 0,26 \cdot 0,0234 = 0,0061 \text{ м} \cdot \text{бар} = 0,61 \text{ см} \cdot \text{бар}.$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} l = 0,22 \cdot 0,0234 = 0,0051 \text{ м} \cdot \text{бар} = 0,51 \text{ см} \cdot \text{бар}.$$

Принимаем, что 1 бар  $\approx$  1 ат. (1 ат. = 1,013 бар).

Используя П. 5, рис. П. 5.1 и П. 5.2, по средней температуре дымовых газов находим степень черноты  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ :

$$\varepsilon_{\text{CO}_2} = f(p_{\text{CO}_2} l, \bar{t}_j) = 0,037,$$

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = f(p_{\text{H}_2\text{O}} l, \bar{t}_j) = 0,027.$$

По П. 5, рис. П. 5.3 определим поправочный коэффициент  $\beta = 1,15$  и рассчитаем степень черноты смеси газов

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} \beta = 0,037 + 0,027 \cdot 1,15 = 0,0692.$$

Вычислим значение поглощательной способности смеси газов:

$A_r = A_{\text{CO}_2} + A_{\text{H}_2\text{O}}$ , где  $A_{\text{CO}_2} = \varepsilon_{\text{CO}_2} \left( \frac{\bar{T}_r}{\bar{T}_c} \right)^{0,65}$ ,  $A_{\text{H}_2\text{O}} = \mu_{\text{H}_2\text{O}}$ . В этих формулах значения  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$  и  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  находятся из П. 5, рис. П. 5.1 и П. 5.2 по средней температуре стенки:  $\varepsilon_{\text{CO}_2} = f(p_{\text{CO}_2} l, \bar{t}_c) = 0,036$ ,  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = f(p_{\text{H}_2\text{O}} l, \bar{t}_c) = 0,028$ . Тогда

$$A_{\text{CO}_2} = \varepsilon_{\text{CO}_2} \left( \frac{\bar{T}_r}{\bar{T}_c} \right)^{0,65} = 0,038 \left( \frac{583}{543} \right)^{0,65} = 0,038 \cdot 1,047 = 0,04.$$

$$A_{\text{H}_2\text{O}} = \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 1,15 \cdot 0,028 = 0,0322.$$

Поглощательная способность газов

$$A_r = A_{\text{CO}_2} + A_{\text{H}_2\text{O}} = 0,04 + 0,0322 = 0,0722.$$

Определим величину плотности теплового потока, передаваемого излучением к стенке трубы:

$$\begin{aligned} q_{r-c} &= \varepsilon'_c C_0 \left[ \varepsilon_r \left( \frac{\bar{T}_r}{100} \right)^4 - A_r \left( \frac{\bar{T}_c}{100} \right)^4 \right] = \\ &= 0,91 \cdot 5,67 \left[ 0,0692 \left( \frac{593}{100} \right)^4 - 0,0722 \left( \frac{543}{100} \right)^4 \right] = 117,6 \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

Плотность теплового потока, передаваемого от дымовых газов к стенке трубы:

$$q = q_k + q_l = 2072 + 117,6 = 2189,6 \text{ Вт/м}^2.$$

## Глава 4

# ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

---

**Т**еплообменным аппаратом или теплообменником называется устройство, служащее для передачи теплоты от одной жидкости, называемой теплоносителем, к другой жидкости (теплоносителю). В качестве теплоносителей могут использоваться газы, капельные жидкости, жидкие металлы, запыленные потоки и т. д.

**Виды теплообменных аппаратов.** По принципу действия теплообменники подразделяются на три вида: рекуперативные, регенеративные и смешительные (контактные) [12].

Рекуперативные теплообменные аппараты — это теплообменники, в которых теплота от одного теплоносителя к другому передается через разделяющую их твердую стенку.

Регенеративные теплообменные аппараты — это теплообменники, в которых одна и та же поверхность омывается то горячим, то холодным теплоносителем. При соприкосновении с горячим теплоносителем стенка аккумулирует теплоту, а затем отдает ее холодному теплоносителю. В качестве поверхностей в них используются теплоаккумулирующие насадки (неподвижные или подвижные). Характерная особенность регенеративного теплообменника — нестационарный режим теплообмена. Для того чтобы процесс теплообмена протекал непрерывно при одинаковой продолжительности периода нагрева и охлаждения, теплообменник должен иметь, как минимум, две параллельно работающие секции.

Смешительные (или контактные) теплообменные аппараты — это теплообменники, в которых передача теплоты от греющего теплоно-

сителя к нагреваемому происходит при непосредственном их контакте. В смесительных теплообменниках используются такие теплоносители, которые легко разделяются после осуществления процесса теплообмена, например вода и воздух.

**Обозначения температур теплоносителей.** Температуру горячего теплоносителя (теплоноситель, который охлаждается) принято обозначать нижним индексом 1 ( $t_1$ ), температуру холодного теплоносителя (теплоноситель, который нагревается) обозначают нижним индексом 2 ( $t_2$ ). Температура теплоносителей на входе в теплообменный аппарат обозначается верхним индексом «штрих» ( $t'_1, t'_2$ ), на выходе — верхним индексом — два штриха ( $t''_1, t''_2$ ).

Из трех рассмотренных выше видов теплообменников наиболее широкое и разностороннее применение находят рекуперативные теплообменники. Поэтому ниже будем рассматривать расчет рекуперативных теплообменников. На рис. 4.1 показан кожухотрубный рекуперативный теплообменный аппарат. В теплообменниках такого типа один теплоноситель течет внутри труб, а другой теплоноситель прокачивается в межтрубном пространстве.

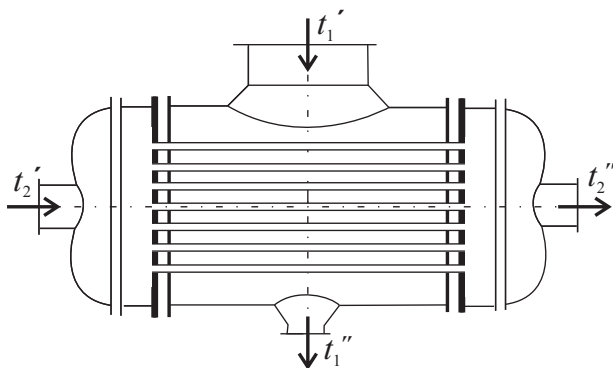


Рис. 4.1. Схема кожухотрубного теплообменного аппарата

**Схемы движения теплоносителей.** В зависимости от направления движения рекуперативные теплообменники подразделяют:

а) на прямоточные, если теплоносители движутся параллельно в одном направлении (рис. 4.2, а);

б) противоточные, если теплоносители движутся параллельно, но в противоположных направлениях (рис. 4.2, б);

в) сложные схемы движения теплоносителей, например с перекрестным током, если теплоносители движутся во взаимно-перпендикулярных направлениях (см. рис. 4.1). Встречаются и более сложные схемы движения теплоносителей.

На рис. 4.2, *в* представлен случай, когда пар конденсируется при постоянной температуре, а другой теплоноситель нагревается. Для этого случая направление движения жидкостей не имеет значения.

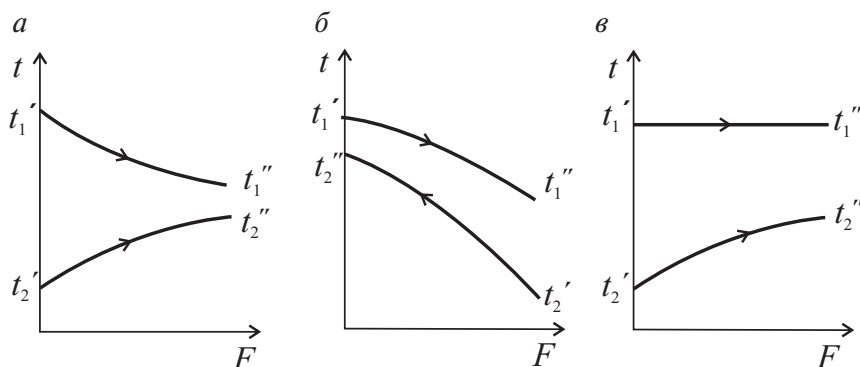


Рис. 4.2. Схемы движения теплоносителей:

*a* — прямоточная; *б* — противоточная; *в* — разновидность сложной схемы

## 4.1. Тепловой расчет рекуперативного теплообменника

**Виды тепловых расчетов.** Различают два вида тепловых расчетов: проектный и поверочный. При проектном расчете задается тепловая мощность теплообменника или массовые расходы теплоносителей и изменения их температуры. Искомой величиной является поверхность теплообмена  $F$ , определив которую в дальнейшем осуществляют конструктивное оформление теплообменного аппарата.

Поверочный расчет выполняется для теплообменника с известной величиной поверхности теплообмена. Целью расчета является определение теплового потока  $Q$  и температуры теплоносителей на выходе из теплообменника.

**Основные положения теплового расчета.** В основе теплового расчета теплообменного аппарата лежат два уравнения: теплового баланса и теплопередачи.

*Уравнение теплового баланса.* Пусть массовый расход в [кг/с] горячего теплоносителя  $G_1$ , а холодного —  $G_2$ . Если на некотором элементарном участке поверхности энтальпия горячей жидкости уменьшилась на  $dh_1$ , а холодной жидкости увеличилась на  $dh_2$ , то при отсутствии тепловых потерь

$$dQ = -G_1 dh_1 = G_2 dh_2. \quad (4.1)$$

При конечном изменении энтальпии

$$-G_1 (h_1'' - h_1') = G_2 (h_2'' - h_2')$$

или

$$G_1 (h_1' - h_1'') = G_2 (h_2'' - h_2'). \quad (4.2)$$

Здесь  $h_1', h_2'$  и  $h_1'', h_2''$  — энтальпия горячего и холодного теплоносителей на входе и выходе из теплообменника.

Если  $c_p = \text{const}$ , то  $\Delta h = c_p \Delta t$ , тогда уравнение теплового баланса (4.2) запишется в виде

$$G_1 c_{p_1} (t_1' - t_1'') = G_2 c_{p_2} (t_2'' - t_2'). \quad (4.3)$$

Из термодинамики известно, что  $c_p G$  — полная расходная теплоемкость [Вт/К], которую обозначают буквой  $C$ . Тогда уравнение (4.3) можно записать так:

$$C_1 (t_1' - t_1'') = C_2 (t_2'' - t_2'). \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (4.5)$$

т. е. изменение температур теплоносителей обратно пропорционально их полным расходным теплоемкостям.

С учетом потерь теплоты в окружающую среду уравнение теплового баланса (4.3) запишется в виде

$$G_1 c_{p_1} (t_1' - t_1'') \eta_{\text{пот}} = G_2 c_{p_2} (t_2'' - t_2'),$$

где  $\eta_{\text{пот}}$  — коэффициент потерь теплоты в окружающую среду в процессе теплообмена,  $\eta_{\text{пот}} = 0,97 - 0,99$ .

*Уравнение теплопередачи.* При рассмотрении теплопередачи через плоскую стенку (см. раздел 1.3) было получено уравнение теплопере-



дачи  $Q = qF = k(t_{ж_1} - t_{ж_2})F$ . Однако это уравнение справедливо для частного случая, а именно при  $t_{ж_1} = \text{const}$  и  $t_{ж_2} = \text{const}$ , т. е. когда температуры теплоносителей при их движении вдоль поверхности не изменяются. Но в теплообменном аппарате (если это не конденсатор) температура горячего теплоносителя уменьшается, а холодного — увеличивается, что приводит к изменению разности температур теплоносителей. Поэтому возникает вопрос относительно того, какая разность температур должна входить в уравнение теплопередачи. Запишем уравнение теплопередачи для элемента поверхности  $dF$ :

$$dQ = k(t_1 - t_2)dF = k \Delta t dF, \quad (4.6)$$

где  $t_1, t_2$  — местные температуры горячего и холодного теплоносителей. Тепловой поток через поверхность  $F$  найдется так:

$$Q = \int_F k \Delta t dF. \quad (4.7)$$

Коэффициент теплопередачи  $k$  слабо зависит от температуры, поэтому можно принять, что  $k = \text{const}$ . Тогда

$$Q = k \int_F \Delta t dF = k \overline{\Delta t} F,$$

где  $\overline{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_F \Delta t dF$  — среднеинтегральный температурный напор.

Уравнение теплопередачи в интегральной форме имеет вид

$$Q = k \overline{\Delta t} F. \quad (4.8)$$

## 4.2. Среднеинтегральный температурный напор

Среднеинтегральный температурный напор ( $\overline{\Delta t}$ ) зависит от значений температур как горячего, так и холодного теплоносителей на входе в теплообменный аппарат и на выходе из него, полных теплоемкостей и схем движения теплоносителей.

Наиболее просто средний температурный напор рассчитывается для прямотока и противотока. Проведем такой расчет на примере

прямоточной схемы движения теплоносителей. В этом случае изменение температур обоих теплоносителей происходит так, как показано на рис. 4.3.

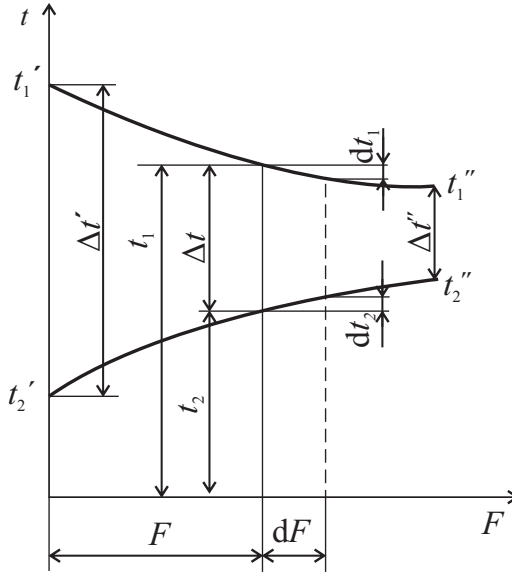


Рис. 4.3. К расчету среднеинтегрального температурного напора для прямоточной схемы движения теплоносителей

Здесь  $\Delta t' = t_1' - t_2'$  — температурный напор на входе в теплообменник, а  $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$  — на выходе из него.

Выделим на некотором расстоянии элемент поверхности  $dF$ . В пределах площадки  $dF$  температура горячего теплоносителя изменится на  $(-dt_1)$ , а холодного теплоносителя — на  $dt_2$ . Согласно уравнению теплового баланса (4.4)

$$dQ = -C_1 dt_1 = C_2 dt_2,$$

где  $dt_1 = -\frac{dQ}{C_1}$ ;  $dt_2 = \frac{dQ}{C_2}$ .

Тогда элементарная разность температур выразится в виде

$$d(\Delta t) = d(t_1 - t_2) = dt_1 - dt_2 = -\frac{dQ}{C_1} - \frac{dQ}{C_2} = -dQ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = -m dQ,$$

где  $m = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ .

Таким образом,

$$dQ = -\frac{d(\Delta t)}{m}. \quad (4.9)$$

С другой стороны, по уравнению теплопередачи (4.6):

$$dQ = k \Delta t dF. \quad (4.10)$$

Приравнивая правые части уравнений (4.9) и (4.10) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk dF. \quad (4.11)$$

Принимая  $m$  и  $k$  постоянными и интегрируя левую часть в пределах от  $\Delta t'$  до  $\Delta t$ , а правую часть — от 0 до  $F$ , получаем

$$\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'} = -mk F, \quad (4.12)$$

откуда

$$\Delta t = \Delta t' e^{-mkF}. \quad (4.13)$$

Подставляя выражение (4.13) в формулу для среднеинтегрального температурного напора, находим

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_F \Delta t dF = \frac{1}{F} \int_F \Delta t' e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{-mkF} (e^{-mkF} - 1). \quad (4.14)$$

С учетом (4.12) и (4.13) уравнение (4.14) примет вид

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}}. \quad (4.15)$$

Если усредним температурный напор по всей поверхности теплообмена, то  $\Delta t = \Delta t''$ , тогда окончательно

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}. \quad (4.16)$$

С помощью аналогичных выкладок можно показать, что и в случае противотока средний температурный напор рассчитывается по формуле (4.16), только изменится содержание  $\Delta t'$  и  $\Delta t''$ :

$$\Delta t' = t_1' - t_2'', \quad \Delta t'' = t_1'' - t_2'.$$

Найденный таким образом температурный напор называется среднеинтегральным или среднелогарифмическим.

Формула (4.16) может быть сведена к одному виду для прямотока и противотока, если независимо от начала и конца поверхности теплообмена обозначить  $\Delta t'' = \Delta t_m$  — меньшая разность температур, а  $\Delta t' = \Delta t_\delta$  — большая разность температур.

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t_\delta - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_\delta}{\Delta t_m}}. \quad (4.17)$$

Если температура обоих теплоносителей вдоль поверхности изменяется незначительно  $\left( \frac{\Delta t_\delta}{\Delta t_m} < 2 \right)$ , то среднеинтегральный температурный напор можно рассчитать по формуле

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t_\delta + \Delta t_m}{2}. \quad (4.18)$$

Температурный напор для теплообменников с перекрестным током и другими более сложными схемами движения теплоносителей определяется по формуле

$$\overline{\Delta t} = \overline{\Delta t}_{\text{прот}} \varepsilon_{\Delta t}, \quad (4.19)$$

где  $\overline{\Delta t}_{\text{прот}}$  — температурный напор, рассчитанный для противоточной схемы движения теплоносителей, а  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$  — поправка на сложность схемы тока, где  $R = \frac{t'_1 - t''_1}{t''_2 - t'_2}$ ,  $P = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2}$ .

На рис. 4.4 показана номограмма для определения поправки  $\varepsilon_{\Delta t}$  для перекрестной схемы тока, наиболее часто встречаемой в теплообменных аппаратах.

Возможные сложные схемы движения теплоносителей и номограммы для определения величины поправочного коэффициента  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$  для этих схем приведены в [2].

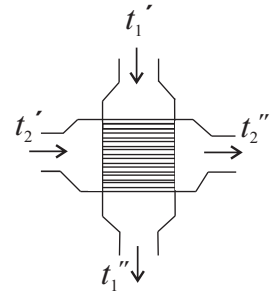
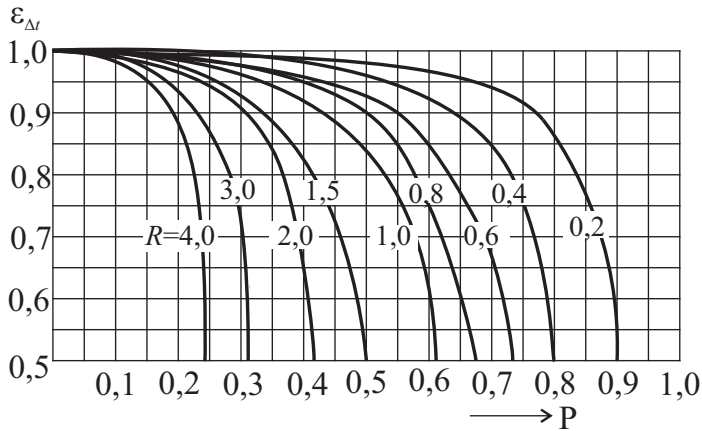


Рис. 4.4. Номограмма для определения поправки для перекрестной схемы тока теплоносителей

### Примеры решения задач по теме «Тепловой расчет теплообменных аппаратов»

**Пример 1.** В маслоохладителе трансформаторное масло охлаждается от  $t_1' = 80^\circ\text{C}$  до  $t_1'' = 30^\circ\text{C}$ . Охлаждающая вода входит с температурой  $t_2' = 15^\circ\text{C}$ . Расходы масла и воды соответственно  $G_1 = 0,28 \text{ кг/с}$ ,  $G_2 = 0,56 \text{ кг/с}$ . Определить температуру воды на выходе из маслоохладителя. Рассчитать среднеинтегральный температурный напор для прямоточной и противоточной схем движения теплоносителей.

*Решение.* Для определения температуры воды на выходе из маслоохладителя запишем уравнение теплового баланса (4.4):

$$G_1 c_{p_1} (t_1' - t_1'') = G_2 c_{p_2} (t_2'' - t_2'),$$

из которого находим температуру охлаждающей воды на выходе из теплообменника

$$t_2'' = t_2' + \frac{G_1 c_{p_1}}{G_2 c_{p_2}} (t_1' - t_1'').$$

Теплоемкости масла и воды выпишем из П. 1, табл. П. 1.4 и П. 1.5 соответственно по их средней температуре. Температура воды на выходе из теплообменника неизвестна. Для прямоточной схемы ее значение будет меньше температуры масла на выходе. В первом

приближении будем считать, что вода нагреется до  $t_2'' = 25^\circ\text{C}$ . Тогда средняя температура воды будет  $20^\circ\text{C}$ .

$$c_{p_1} = 1876 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K}),$$

$$c_{p_2} = 4183 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K}).$$

$$t_2'' = 15 + \frac{0,28 \cdot 1876}{0,56 \cdot 4183} (80 - 30) = 26,2^\circ\text{C}.$$

Проверка правильности принятой температуры  $t_2''$ .

$$\Delta = \frac{26,2 - 25}{25} = 0,048 < 0,05.$$

Так как погрешность составляет меньше 5 %, то пересчет производить не будем.

Определим среднеинтегральный температурный напор для прямотока и противотока по формуле (4.17).

Для прямотока (см. рис. 4.2, а):

$$\Delta t_\delta = t_1' - t_2' = 80 - 15 = 65^\circ\text{C};$$

$$\Delta t_m = t_1'' - t_2'' = 30 - 26 = 4^\circ\text{C};$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t_\delta - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_\delta}{\Delta t_m}} = \frac{65 - 4}{\ln \frac{65}{4}} = 22^\circ\text{C}.$$

Для противотока (см. рис. 4.2, б):

$$\Delta t_\delta = t_1' - t_2'' = 80 - 26 = 54^\circ\text{C};$$

$$\Delta t_m = t_1'' - t_2' = 30 - 15 = 15^\circ\text{C};$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t_\delta - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_\delta}{\Delta t_m}} = \frac{54 - 15}{\ln \frac{54}{15}} = 30,5^\circ\text{C}.$$

Таким образом, при одинаковых условиях величина среднеинтегрального температурного напора для противоточной схемы движения теплоносителей получается больше, чем для прямоточной схемы движения теплоносителей.

**Пример 2.** На латунных трубках теплообменного аппарата конденсируется пар давлением  $p = 4,76$  бар. Наружный диаметр трубок  $d_2 = 20$  мм, внутренний  $d_1 = 18$  мм. Внутри трубок течет вода со скоростью  $w = 1$  м/с. Температура воды на входе  $t'_2 = 30^\circ\text{C}$ , на выходе  $t''_2 = 70^\circ\text{C}$ . Расположение трубок шахматное: число рядов по горизонтали  $n_1 = 17$ , по вертикали  $n_2 = 10$ . Продольный шаг пучка  $S_1 = 100$  мм, поперечный —  $S_2 = 50$  мм. Переохлаждение конденсата отсутствует. Определить поверхность теплообмена.

*Решение.* Поверхность теплообмена выражается из формулы (4.8)

$$F = \frac{Q}{\Delta t k}.$$

Величина  $Q$  будет равна тепловому потоку, который затрачивается на нагрев воды:  $Q = c_{p_2} G(t''_2 - t'_2)$ . Массовый расход воды  $G$  определим по формуле  $G = \rho w f = \rho w \frac{\pi d_2^2}{4} n_1 n_2$ .

Физические параметры воды выпишем из табл. П. 1.5 по средней температуре  $\bar{t}_ж = \frac{t'_2 + t''_2}{2} = \frac{30 + 70}{2} = 50^\circ\text{C}$ :  $\rho = 988$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 0,556 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $c_p = 4,18$  кДж/(кг·К);  $\lambda = 0,648$  Вт/(м·К);  $\text{Pr}_ж = 3,54$ .

$$G = 988 \cdot 1 \frac{3,14(18 \cdot 10^{-3})^2}{4} 17 \cdot 10 = 42,7 \text{ кг/с}.$$

Тепловая мощность теплообменного аппарата

$$Q = 42,7 \cdot 4,18 (70 - 30) = 7140 \text{ кВт}.$$

Коэффициент теплопередачи  $k$  определим по приближенной формуле (1.41), так как  $\frac{d_2}{d_1} < 2$ :

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{\text{лат}}} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

где  $\delta = (d_2 - d_1) / 2 = (20 - 18) / 2 = 1$  мм;  $\lambda_{\text{лат}}$  — коэффициент теплопроводности латуни выписываем из табл. П. 1.1:  $\lambda_{\text{лат}} = 85,5$  Вт/(м·К).

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$  от пара к поверхности трубного пучка определится по формуле (2.104):

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_{\text{пучка}} = \bar{\alpha}_r \frac{0,84}{n^{0,07}}, \text{ где } n = \frac{n_2}{2}.$$

$$\bar{\alpha}_r = 0,728 \sqrt[4]{\frac{r g \rho_{\text{ж}}^2 \lambda_{\text{ж}}^3}{\mu_{\text{ж}} (t_s - t_c) d_2}}.$$

Из П. 1, табл. П. 1.6 по величине давления находим температуру насыщения:  $t_s = 150^\circ\text{C}$ . В формуле для расчета  $\alpha_r$  не известна температура стенки трубок. Зададимся в первом приближении  $t_c = \frac{t_{\text{ж}} + t_s}{2} = \frac{50 + 150}{2} = 100^\circ\text{C}$ . По определяющей температуре  $\frac{t_c + t_s}{2} = \frac{100 + 150}{2} = 125^\circ\text{C}$  из табл. П. 1.5 выписываем параметры конденсата:  $\rho_{\text{ж}} = 939 \text{ кг/м}^3$ ;  $\lambda_{\text{ж}} = 0,686 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $\mu_{\text{ж}} = 227,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Значение скрытой теплоты парообразования определяем из табл. П. 1.6 по температуре насыщения  $t_s$ :  $r = 2114,3 \text{ кДж/кг}$ .

$$\bar{\alpha}_r = 0,728 \sqrt[4]{\frac{2114,3 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 939^2 \cdot 0,686^3}{227,6 \cdot 10^{-6} (150 - 100) 20 \cdot 10^{-3}}} = 9240 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

$$\bar{\alpha}_{\text{пучка}} = 9240 \frac{0,84}{5^{0,07}} = 6930 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  от внутренней поверхности трубки к движущейся воде найдем из формул теплоотдачи при вынужденном течении жидкости в трубе. Сначала определим режим течения воды по величине Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{w d}{\nu} = \frac{1 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{0,556 \cdot 10^{-6}} = 32,4 \cdot 10^3.$$

Величина  $(32,4 \cdot 10^3) > 10^4$ , значит, режим движения воды турбулентный. Пользуясь формулой (2.60)  $\overline{\text{Nu}}_{\text{ж},d} = 0,023 \text{Re}_{\text{ж},d}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} \left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_l$  найдем  $\alpha_2$ .

Принимаем, что трубы длинные, т. е.  $\varepsilon_l = 1$ .



$$\overline{Nu} = 0,023(32,4 \cdot 10^3)^{0,8} 3,54^{0,43} \left( \frac{3,54}{1,75} \right)^{0,25} = 191.$$

$$\overline{Nu} = \frac{\alpha_2 d_2}{\lambda} \rightarrow \alpha_2 = \frac{\overline{Nu} \lambda}{d_2} = \frac{191 \cdot 0,648}{0,018} = 6880 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Сделаем проверку правильности принятой величины температуры стенки. Для этого приравняем тепловой поток, передаваемый в процессе теплоотдачи от пара к поверхности трубки, тепловому потоку, подводимому к воде, движущейся по трубке.

$$\alpha_1 (t_s - t_c) = \alpha_2 (t_c - \bar{t}_ж).$$

$$6930 (150 - 100) = 6880 (100 - 50).$$

$$346500 = 344000. \text{ Погрешность } \Delta = \frac{346500 - 344000}{346500} = 0,007.$$

Считаем, что температура стенки нами выбрана правильно, так как погрешность не превышает 5 %.

Рассчитаем коэффициент теплопередачи:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{\text{лат}}} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{6930} + \frac{10^{-3}}{85,5} + \frac{1}{6880}} = 3452 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Определим среднеинтегральный температурный напор (см. рис. 4.2, в) по формуле (4.17):

$$\Delta t_{\delta} = t_s - t'_2 = 150 - 30 = 120^\circ \text{C},$$

$$\Delta t_{\text{м}} = t_s - t''_2 = 150 - 70 = 80^\circ \text{C},$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_{\text{м}}}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_{\text{м}}}} = \frac{120 - 80}{\ln \frac{120}{80}} = 99^\circ \text{C}.$$

Определим поверхность теплообмена:

$$F = \frac{7140 \cdot 10^3}{99 \cdot 3452} = 21 \text{ м}^2.$$

## Библиографический список

---

1. Исаченко В. П. Теплопередача : учебник / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — Москва : Энергия, 1981. — 417 с.
2. Королев В. Н. Тепломассообмен : учебное пособие / В. Н. Королев. — Екатеринбург : УрФУ, 2013. — 250 с. — ISBN 978-5-321-02136-1.
3. Лыков А. В. Тепломассообмен : справочник / А. В. Лыков. — Москва : Энергия, 1978. — 480 с.
4. Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. — Москва : Энергия, 1977. — 343 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — Москва : Наука, 1974. — 711 с.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. — Москва : Атомиздат, 1979. — 415 с.
7. Юдаев Б. Н. Теплопередача : учебник для вузов / Б. Н. Юдаев. — Москва : Высшая школа, 1981. — 319 с.
8. Барановский Н. В. Пластинчатые и спиральные теплообменники / Н. В. Барановский, Л. М. Коваленко, А. Р. Ястребенецкий. — Москва : Машиностроение, 1973. — 288 с.
9. Лун-Фу А. В. Изолинии скорости потока при обтекании оребренной трубы. Теплофизика и теплоэнергетика : сб. науч. ст. / А. В. Лун-Фу, В. Н. Королев. — Магнитогорск : МАГУ, 2010. С. 28–30.
10. Юдин В. Ф. Теплообмен поперечнооребранных труб / В. Ф. Юдин. — Ленинград : Машиностроение, 1982. — 189 с.
11. Цветков Ф. Ф. Тепломассообмен : учебное пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев ; М-во науки и высшего обр. РФ. — Москва : МЭИ, 2005. — 550 с. — ISBN 5-7046-1270-9.

# Приложение 1

## Физические и теплофизические свойства различных материалов и веществ [2, с. 217–225]

Таблица П. 1.1

Свойства различных материалов и веществ при фиксированной температуре

Наименование материалов	$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с
Неметаллические материалы					
Асбест листовой	0	770	0,1163	0,818	0,198
Асбест волокно	50	470	0,1105	0,818	0,290
Асфальт	20	2110	0,698	2,090	0,159
Бакелит	20	1650	0,180	0,815	0,134
Бетон	20	2300	1,280	1,130	0,494
Глина огнеупорная	450	1845	1,040	1,090	0,516
Гравий	20	1840	0,361	—	—
Дерево (дуб)	20	800	0,207	1,760	0,147
Дерево (сосна)	20	448	0,107	2,7	—
Земля сухая	—	1500	0,1385	—	—
Земля влажная	—	1700	0,658	2,01	0,192
Каменный уголь	20	1400	0,186	1,31	1,03
Кирпич силикатный	100	1900	1,070	0,840	0,340
Кирпич строительный	20	1700	0,23–0,30	0,837	0,460
Кирпич карборундовый	—	1000	11,3	0,678	1,66
Клинкер	30	1400	0,169	1,42	0,114
Кокс порошкообразный	100	4490	0,191	1,22	0,035
Лед	0	920	2,25	2,26	1,08
Линолеум	20	1180	0,186	—	—
Мел	50	2000	0,93	0,88	0,531
Минеральная шерсть	50	200	0,0465	0,92	0,253
Мрамор	90	2700	1,31	0,419	1,15

Продолжение табл. П1.1

Наименование материалов	$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с
Опилки древесные	20	200	0,070	—	—
Парафин	20	920	0,168	—	—
Песок сухой	20	1500	0,326	0,798	2,73
Песок влажный	20	1650	1,130	2,09	0,492
Портландцемент	30	1900	0,303	1,13	0,140
Пробковая пластина	30	190	0,0420	1,88	0,117
Пробка гранулированная	20	45	0,0384	—	—
Резина	0	1200	0,163	1,38	0,0985
Сахарный песок	0	1600	0,582	1,26	0,278
Слюда	—	290	0,582	0,88	2,280
Сланец	100	2800	1,49	—	—
Снег	—	560	0,465	2,09	0,398
Совелит	100	450	0,0976	—	—
Стекло	200	2500	0,745	0,670	0,445
Стеклянная вата	0	200	0,0372	0,67	0,278
Текстолит	20	1350	0,17	1,45	0,087
Торфоплиты	50	220	0,064	—	—
Фарфор	95	2400	1,035	1,09	0,398
Фибра (пластина)	20	240	0,049	—	—
Шлакобетон в куске	—	2150	0,43	0,88	0,495
Шлаковата	100	250	0,47	—	—
Штукатурка	20	1680	0,78	—	—
Металлы					
Алюминий	0	2670	204	0,92	91,3
Бронза	20	8000	64	0,331	20,8
Латунь	0	8600	85,5	0,378	26,4
Медь	0	8800	384	0,381	114,5
Никель	20	9000	58,2	0,462	14,01
Олово	0	7230	64,0	0,921	39,2
Свинец	0	11400	34,9	0,129	23,5
Серебро	0	10500	458	0,234	186,5
Сталь	20	7900	45,4	0,462	12,5
Титан	0	4540	15,1	0,532	6,2
Цинк	20	7000	116,3	0,394	42,3
Чугун	20	7220	63,0	0,504	17,4
Жидкости					

Окончание табл. П1.1

Наименование материалов	$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с
Бензин высшего качества	20	740	0,186	2,093	0,120
Вода	0	999,9	0,551	4,212	0,131
Керосин высшего качества	20	840	0,116	2,219	0,062
Спирт метиловый	0	809,7	0,214	2,428	0,109
Спирт этиловый	0	806,2	0,188	2,302	0,101
Газы					
Азот	0	1,25	0,024	1,03	18,9
Аммиак	0	0,771	0,21	2,043	13,4
Водород	0	0,09	0,172	14,19	135,0
Водяной пар	100	0,598	0,024	2,135	18,6
Воздух (сухой)	0	1,293	0,244	1,005	18,8
Гелий	0	0,178	0,143	5,203	154,3
Кислород	0	1,429	0,0247	0,915	18,9
Оксид углерода	0	1,250	0,0233	1,039	17,9
Углекислый газ	0	1,977	0,0146	0,815	9,10

Таблица П. 1.2

## Свойства сухого воздуха при давлении 760 мм рт. ст.

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Н·с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
–50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,23	0,728
–40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,04	0,728
–30	1,453	1,013	2,20	14,9	15,7	10,80	0,723
–20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	12,79	0,716
–10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,8	22,8	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,3	23,7	27,80	0,684

Окончание табл. П1.2

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Н·с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
160	0,815	1,017	3,64	43,9	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,5	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,0	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,9	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,2	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,1	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	163,4	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	188,8	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	216,2	46,7	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	276,2	51,2	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	316,5	53,5	233,7	0,724

Таблица П. 1.3

**Свойства дымовых газов при давлении 760 мм рт. ст. (мольная доля водяного пара, углекислого газа и азота в смеси соответственно равны: 0,11; 0,13; 0,76)**

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·K)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Н·с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
0	1,295	1,042	2,28	16,9	15,8	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	30,8	20,4	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	48,9	24,5	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	69,9	28,2	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	94,3	31,7	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	121,1	34,8	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	150,9	37,9	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	183,8	40,7	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	219,7	43,4	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,00	258,0	45,9	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	303,4	48,4	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	345,5	50,7	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,62	392,4	53,0	221,0	0,56

Таблица П. 1.4

## Свойства трансформаторного масла

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , Дж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м K)	$\mu \cdot 10^3$ , Н с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\alpha \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , 1/K	Pr
0	892,5	1549	11,23	62,98	70,5	8,14	6,80	866
10	886,4	1620	11,15	33,55	37,9	7,83	6,85	484
20	880,3	1666	11,06	19,82	22,5	7,56	6,90	298
30	874,2	1729	10,98	12,85	14,7	7,28	6,95	202
40	868,2	1787	10,90	8,94	10,3	7,03	7,00	146
50	862,1	1846	10,82	6,53	7,58	6,81	7,05	111
60	856,0	1905	10,72	4,95	5,78	6,58	7,10	87,8
70	850,0	1963	10,64	3,87	4,54	6,36	7,15	71,3
80	843,9	2026	10,56	3,08	3,66	6,17	7,20	59,3
90	837,8	2085	10,47	2,54	3,03	6,00	7,25	50,5
100	831,8	2143	10,39	2,13	2,56	5,87	7,30	43,9
110	825,7	2202	10,30	1,81	2,20	5,67	7,35	38,8
120	819,6	2260	10,22	1,57	1,92	5,50	7,40	34,9

Таблица П. 1.5

## Свойства воды на линии насыщения

$t$ , °C	$p$ , бар	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$h$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/ (кг·K)	$\lambda$ , Вт/ (м·K)	$\alpha \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Н·с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , 1/K	Pr
0	1,013	999,9	0	4,212	0,560	13,2	1788	1,789	0,63	13,5
10	1,013	999,7	42,04	4,191	0,580	13,8	1306	1,306	0,70	9,45
20	1,013	998,2	83,91	4,183	0,597	14,3	1004	1,006	1,82	7,03
30	1,013	995,7	125,7	4,174	0,612	14,7	801,5	0,805	3,21	5,45
40	1,013	992,2	167,5	4,174	0,627	15,1	653,3	0,659	3,87	4,36
50	1,013	988,1	209,3	4,174	0,640	15,5	549,4	0,556	4,49	3,59
60	1,013	983,1	251,1	4,179	0,650	15,8	469,9	0,478	5,11	3,03
70	1,013	977,8	293,0	4,187	0,662	16,1	406,1	0,415	5,70	2,58
80	1,013	971,8	335,0	4,195	0,669	16,3	355,1	0,365	6,32	2,23
90	1,013	965,3	377,0	4,208	0,676	16,5	314,9	0,326	6,95	1,97
100	1,013	958,4	419,1	4,220	0,684	16,8	282,5	0,295	7,52	1,75
110	1,43	951,0	461,4	4,233	0,685	17,0	259,0	0,272	8,08	1,60
120	1,98	943,1	503,7	4,250	0,686	17,1	237,4	0,252	8,64	1,47
130	2,70	934,8	546,4	4,266	0,686	17,3	217,8	0,233	9,19	1,35
140	3,61	926,1	589,1	4,287	0,685	17,2	201,1	0,217	9,72	1,26
150	4,76	917,0	632,2	4,313	0,684	17,3	186,4	0,203	10,3	1,17
160	6,18	907,4	675,4	4,346	0,681	17,8	173,6	0,191	10,7	1,10
170	7,92	897,3	719,3	4,380	0,676	17,2	162,8	0,181	11,3	1,05
180	10,03	886,9	763,3	4,417	0,672	17,2	153,0	0,173	11,9	1,03

Окончание табл. П1.5

$t$ , °C	$p$ , бар	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$h$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$\alpha \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Н·с/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , 1/K	Pr
190	12,55	876,0	807,8	4,459	0,664	17,2	144,2	0,165	12,6	0,965
200	15,55	863,0	852,5	4,505	0,658	17,0	136,4	0,158	13,3	0,932
210	19,08	852,8	897,7	4,555	0,649	16,7	130,5	0,153	14,1	0,915
220	23,20	840,3	943,7	4,614	0,640	16,5	124,6	0,148	14,8	0,898
230	27,98	827,3	990,2	4,681	0,629	16,3	119,7	0,145	15,9	0,888
240	33,48	813,6	1037,5	4,76	0,617	16,0	114,8	0,141	16,8	0,883
250	39,78	799,0	1085,7	4,87	0,605	15,5	109,0	0,137	18,1	0,884
260	46,94	784,0	1135,7	4,98	0,593	15,2	105,9	0,135	19,7	0,892
270	55,05	767,9	1185,3	5,12	0,578	14,7	102,0	0,133	21,6	0,905
280	64,19	750,7	1236,8	5,30	0,565	14,3	98,1	0,131	23,7	0,917
290	74,45	732,3	1290,0	5,50	0,548	13,7	94,2	0,129	26,2	0,944
300	85,92	712,5	1344,9	5,76	0,532	13,0	91,2	0,128	29,2	0,986
310	98,70	691,1	1402,2	6,11	0,514	12,2	88,3	0,128	32,9	1,05
320	112,90	667,1	1462,1	6,57	0,494	11,3	85,3	0,128	38,2	1,14
330	128,65	640,2	1526,2	7,25	0,471	10,2	81,4	0,127	43,3	1,25
340	146,08	610,1	1594,8	8,20	0,446	8,95	77,5	0,127	53,4	1,42
350	165,37	574,4	1671,4	10,10	0,431	7,90	72,6	0,126	66,8	1,70
360	186,74	528,0	1761,5	14,65	0,367	4,20	66,7	0,126	109	2,66
370	210,53	450,5	1892,5	40,32	0,338	1,85	56,9	0,126	264	6,80

Таблица П. 1.6

## Свойства водяного пара на линии насыщения

$t$ , °C	$p$ , бар	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$r$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·K)	$\alpha \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , (Н·с)/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
100	1,013	0,598	2256,8	2,135	2,372	18,58	11,97	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2230,0	2,177	2,489	13,83	12,46	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2202,8	2,206	2,593	10,50	12,85	11,46	1,09
130	2,70	1,496	2174,3	2,257	2,686	7,972	13,24	8,85	1,11
140	3,61	1,966	2145,0	2,315	2,791	6,130	13,54	6,89	1,12
150	4,76	2,547	2114,3	2,395	2,884	4,728	13,93	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2082,6	2,479	3,012	3,722	14,32	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2049,5	2,583	3,128	2,939	14,72	3,57	1,21
180	10,03	5,157	2015,2	2,709	3,268	2,339	15,11	2,93	1,25
190	12,55	6,397	1978,8	2,856	3,419	1,872	15,60	2,44	1,30
200	15,55	7,862	1940,7	3,023	3,547	1,492	15,99	2,03	1,36
210	19,08	9,588	1900,5	3,199	3,722	1,214	16,38	1,71	1,41
220	23,20	11,62	1857,8	3,408	3,896	0,983	16,87	1,45	1,47



Окончание табл. П1.6

$t$ , °C	$p$ , бар	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$r$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·K)	$\alpha \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , (Н·с)/м <sup>2</sup>	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
230	27,98	13,99	1813,0	3,634	4,094	0,806	17,36	1,24	1,54
240	33,48	16,76	1766	3,881	4,290	0,658	17,75	1,06	1,61
250	39,78	19,98	1716	4,157	4,515	0,544	18,24	0,913	1,68
260	46,94	23,72	1661	4,467	4,800	0,453	18,83	0,794	1,75
270	55,05	28,09	1604	4,815	5,115	0,378	19,32	0,688	1,82
280	64,19	33,19	1543	5,234	5,490	0,317	19,91	0,600	1,90
290	74,45	39,15	1476	5,694	5,830	0,261	20,59	0,526	2,01
300	85,92	46,21	1404	6,280	6,270	0,216	21,28	0,461	2,13
310	98,70	54,58	1325	7,118	6,840	0,176	21,97	0,403	2,29
320	112,90	64,72	1238	8,206	7,510	0,141	22,85	0,353	2,50
330	128,65	77,10	1140	9,881	8,260	0,108	23,93	0,310	2,86
340	146,08	92,76	1027	12,35	9,300	0,0811	25,20	0,272	3,35
350	165,37	113,6	893	16,24	10,70	0,0581	26,58	0,234	4,03
360	186,74	144,0	719,7	23,03	12,79	0,0386	29,13	0,202	5,23
370	210,53	203,0	438,4	56,52	17,10	0,0150	33,73	0,166	11,1

Таблица П. 1.7

## Теплофизические свойства дизельного масла

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·K)	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^4$ , (Н·с)/м <sup>2</sup>	Pr
10	925,0	1,806	0,128	1520	13891	19550
20	908,4	1,840	0,127	620	5631	8000
30	902,0	1,875	0,126	280	2521	3730
40	895,5	1,902	0,126	135	1206	1840
50	889,0	1,944	0,125	76	674	1045
60	882,4	1,982	0,124	45	396	630
70	876,0	2,015	0,124	29	254	413
80	870,0	2,053	0,123	20	173	290
90	863,1	2,074	0,122	14,2	122	208
100	857,0	2,122	0,122	10,8	92	162

Таблица П. 1.8

**Теплофизические свойства антифриза «40»**

$t$ , °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
0	1081	3,17	0,363	8,14	75,6
10	1075	3,21	0,374	5,30	48,8
20	1070	3,26	0,379	3,74	34,4
30	1065	3,31	0,385	2,82	25,8
40	1059	3,35	0,390	2,17	19,5
50	1054	3,40	0,395	1,71	15,5
60	1049	3,44	0,401	1,34	12,0
70	1044	3,49	0,406	1,10	9,9
80	1039	3,54	0,412	0,95	8,4

## Приложение 2

### Значения показательных и гиперболических функций [2, с. 231]

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$\operatorname{sh}x$	$\operatorname{ch}x$	$\operatorname{th}x$
0,0	1,00	1,00	0,000	1,000	0,000
0,1	1,11	0,90	0,100	1,005	0,100
0,2	1,22	0,82	0,201	1,020	0,197
0,3	1,34	0,74	0,305	1,045	0,291
0,4	1,49	0,67	0,411	1,081	0,380
0,5	1,64	0,61	0,521	1,128	0,462
0,6	1,82	0,55	0,637	1,186	0,537
0,7	2,00	0,50	0,759	1,255	0,604
0,8	2,22	0,45	0,888	1,337	0,664
0,9	2,46	0,41	1,027	1,433	0,716
1,0	2,72	0,37	1,175	1,543	0,762
1,1	3,00	0,33	1,336	1,668	0,801
1,2	3,32	0,30	1,510	1,811	0,834
1,3	3,70	0,27	1,698	1,971	0,862
1,4	4,06	0,25	1,904	2,151	0,885
1,5	4,50	0,22	2,129	2,352	0,905
1,6	4,95	0,20	2,376	2,577	0,922
1,7	5,55	0,18	2,646	2,828	0,935
1,8	6,05	0,17	2,942	3,108	0,947
1,9	6,63	0,15	3,268	3,418	0,956
2,0	7,39	0,14	3,627	3,762	0,964
2,1	8,12	0,12	4,022	4,144	0,971
2,2	9,03	0,11	4,457	4,568	0,976
2,3	9,98	0,10	4,937	5,037	0,980
2,4	11,0	0,091	5,466	5,557	0,984
2,5	12,3	0,083	6,050	6,132	0,987
2,6	13,5	0,074	6,695	6,769	0,989
2,7	14,8	0,067	7,406	7,474	0,991
2,8	16,4	0,061	8,192	8,253	0,993
2,9	18,2	0,055	9,060	9,115	0,994
3,0	20,1	0,500	10,018	10,068	0,995

## Приложение 3

Номограммы для расчета задач по нестационарной теплопроводности [2, с. 232-239]

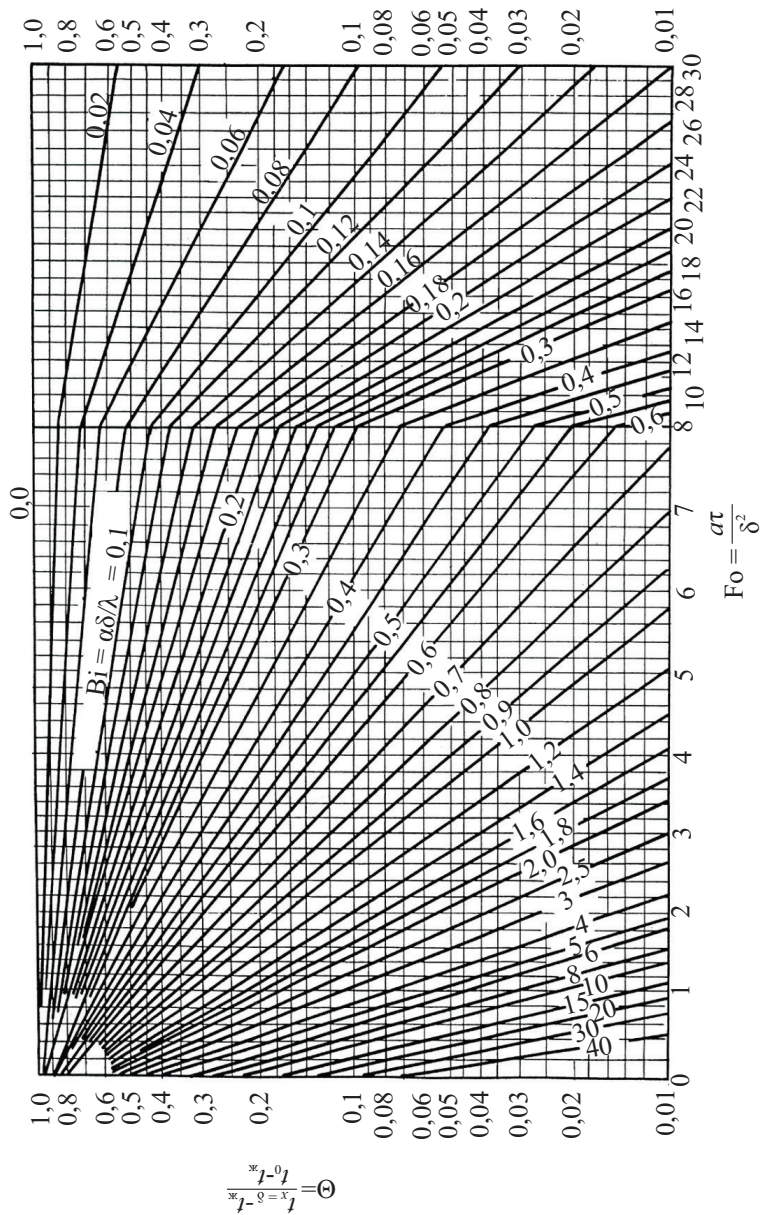


Рис. П. 3.1. Зависимость  $\theta = f(Bi; Fo)$  для поверхности пластины

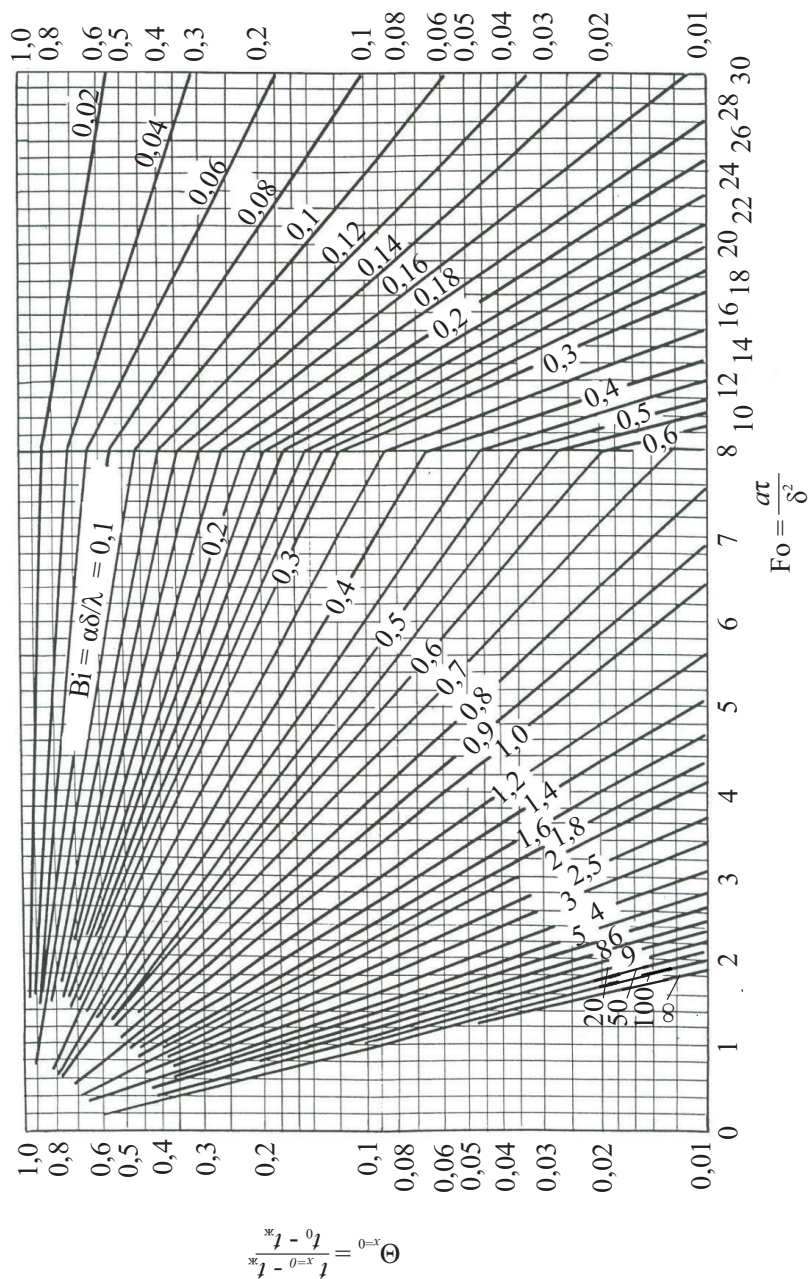


Рис. П. 3.2. Зависимость  $\theta = f(Bi; Fo)$  для середины пластины



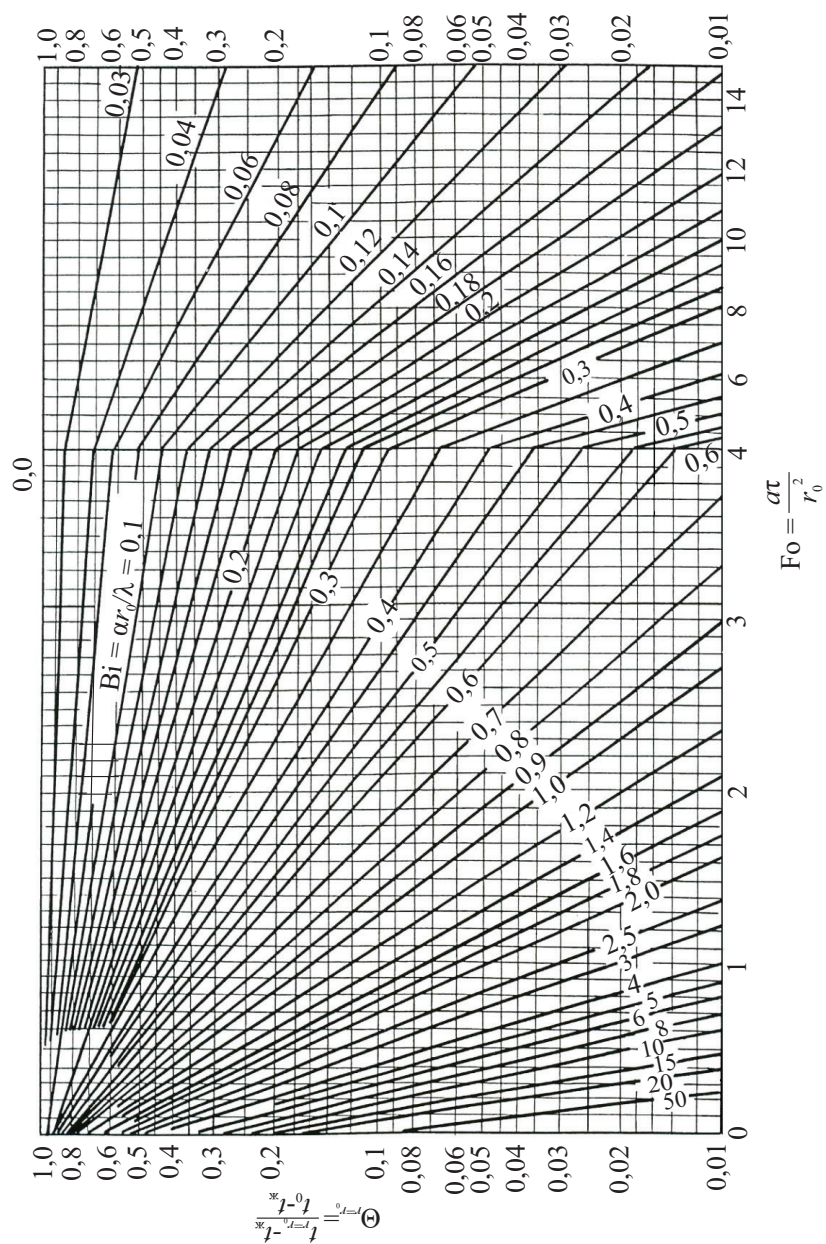


Рис. П. 3.3. Зависимость  $\theta = f(Bi; Fo)$  для поверхности цилиндра

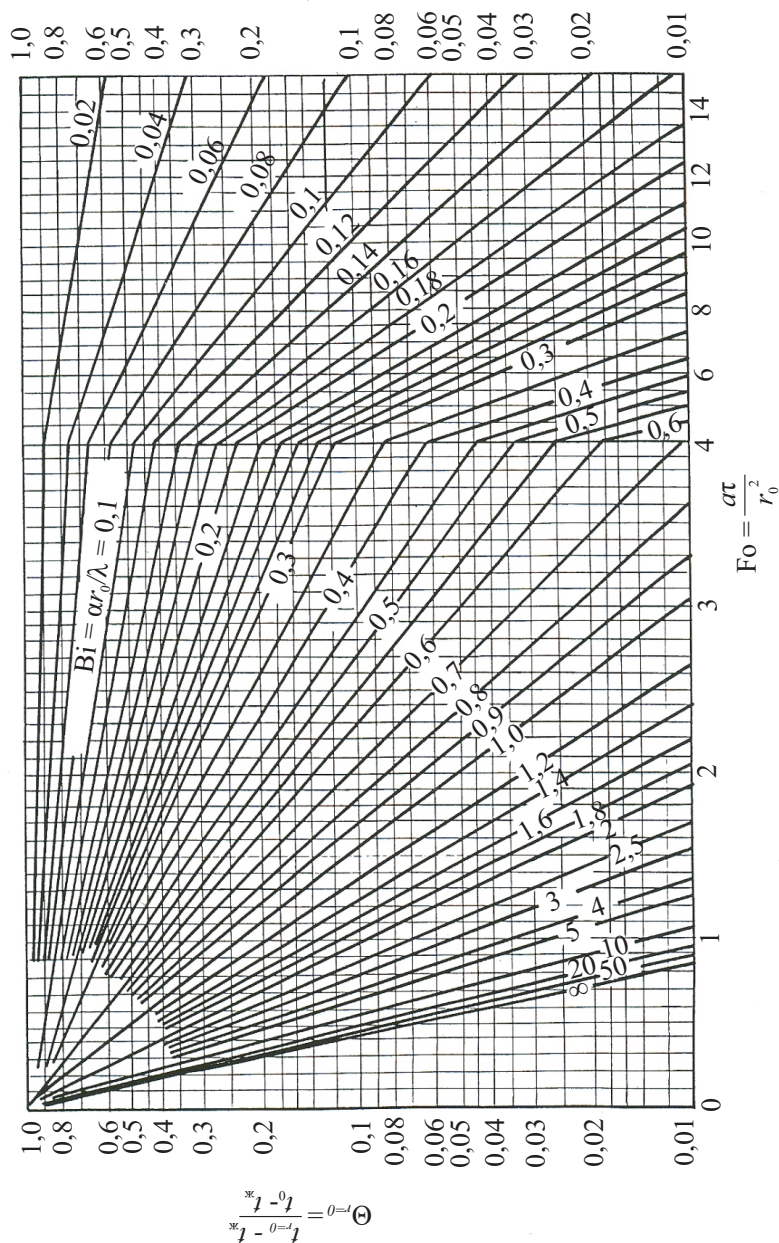


Рис. П. 3. 4. Зависимость  $\theta = f(Bi; Fo)$  для оси цилиндра

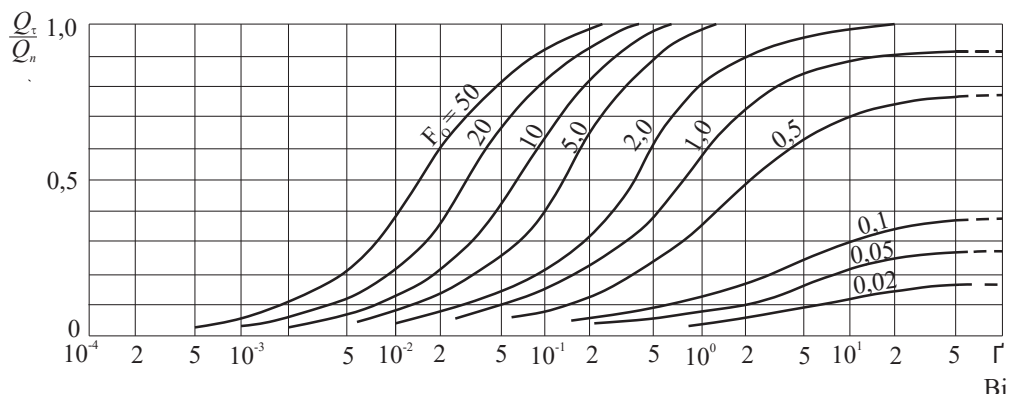


Рис. П. 3.5. Зависимость  $\frac{Q_i}{Q_n} = \varphi(Bi; Fo)$  для неограниченной пластины

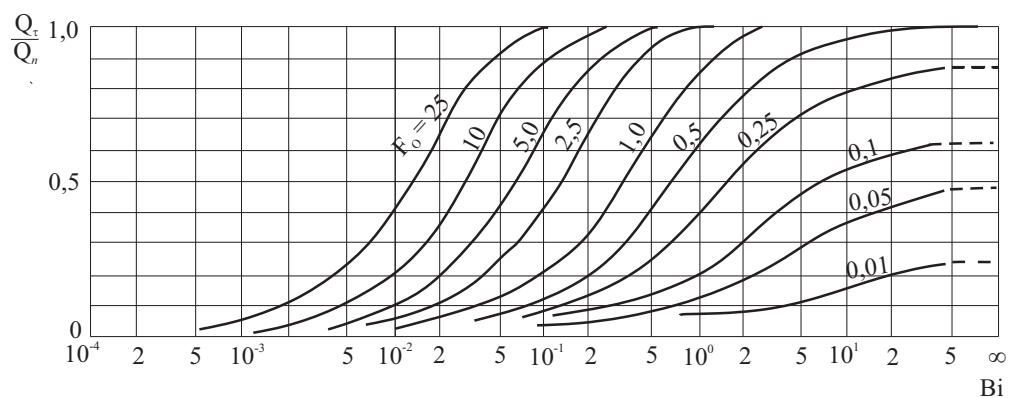


Рис. П. 3.6. Зависимость  $\frac{Q_i}{Q_n} = \varphi(Bi; Fo)$  для бесконечного цилиндра



## Приложение 4

### Степень черноты поверхности излучения различных материалов [2, с. 228–230]

Наименование материалов	$t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon$
Алюминий полированный	225–575	0,039–0,057
То же шероховатый	26	0,055
Алюминий, окисленный при 600 °С	200–600	0,11–0,19
Железо полированное	425–1020	0,144–0,377
Железо свежеобработанное наждаком	20	0,242
Железо окисленное	100	0,736
Железо окисленное гладкое	125–525	0,78–0,82
Железо литое необработанное	925–1115	0,87–0,95
Стальное литье полированное	770–1040	0,52–0,56
Сталь листовая шлифованная	940–1100	0,55–0,61
Сталь, окисленная при 600 °С	200–600	0,80
Сталь листовая с плотным блестящим слоем окиси	25	0,82
Чугун обточенный	830–990	0,60–0,70
Чугун, окисленный при 600 °С	200–400	0,64–0,78
Окись железа	500–1200	0,85–0,95
Латунная пластина, прокатанная, с естественной поверхностью	22	0,06
Латунная пластина, прокатанная, обработанная грубым наждаком	22	0,20
Латунная пластина тусклая	50–350	0,22
Латунь, окисленная при 600 °С	200–600	0,61–0,59
Медь, тщательно полированная, электролитная	80–115	0,018–0,023
Медь торговая, шабрена до блеска, но не зеркальная	22	0,072

Продолжение табл.

Наименование материалов	$t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon$
Медь, окисленная при 600 °С	200–600	0,57–0,87
Оксид меди	800–1100	0,66–0,54
Никель технический чистый, полированный	225–375	0,07–0,087
Никелированное травленное железо, неполированное	20	0,11
Никелевая проволока	185–1000	0,096–0,186
Никель, окисленный при 600 °С	200–600	0,37–0,48
Оксид никеля	650–1255	0,59–0,86
Хромоникель	125–1034	0,64–0,76
Платина чистая, полированная пластина	225–625	0,054–0,104
Платиновая лента	925–1115	0,12–0,17
Платиновая нить	25–1230	0,036–0,192
Платиновая проволока	225–1375	0,073–0,182
Ртуть очень чистая	0–100	0,09–0,12
Свинец серый, окисленный	25	0,281
Свинец, окисленный при 200 °С	200	0,63
Серебро полированное, чистое	225–625	0,0198–0,0324
Хром	100–1000	0,08–0,26
Цинк продажный (99,1 %), полированный	225–325	0,045–0,053
Цинк окисленный при 400 °С	400	0,11
Оцинкованное листовое железо блестящее	28	0,228
Оцинкованное листовое железо серое, окисленное	24	0,276
Вольфрам, нить	3027	0,39
Золото неполированное	20	0,47
Золото полированное	20	0,025
Молибден, нить	725	0,096
Олово блестящее	20	0,07
Асбестовый картон	24	0,96
Асбестовая бумага	40–370	0,93–0,945
Гипс	20	0,903
Кварц плавный, шероховатый	20	0,932
Кирпич красный, шероховатый	20	0,93
Кирпич диносовый, неглазурованный, шероховатый	100	0,80
Кирпич диносовый, глазурованный	1100	0,85
Кирпич шамотный, глазурованный	1100	0,75
Кирпич огнеупорный	—	0,8–0,9
Кирпичная кладка, оштукатуренная	0	0,93

Окончание табл.

Наименование материалов	$t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon$
Лак белый эмалевый, на железной шероховатой пластине	23	0,906
Лак черный блестящий, распыленный на железной пластине	25	0,875
Лак черный матовый	40–95	0,96–0,98
Лак белый	40–95	0,80–0,95
Шеллак черный, блестящий	21	0,821
Шеллак черный, матовый	75–145	0,91
Масляные краски различных цветов	100	0,92–0,96
Алюминиевая эмаль, шероховатая	20	0,39
Алюминиевый лак по шероховатой поверхности	20	0,39
Алюминиевая краска, нагретая до 325 °C	150–315	0,35
Алюминиевая бронза	100	0,20–0,40
Бакелитовая эмаль	0–200	0,885
Свинцовая грунтовка	0–100	0,93
Мрамор сероватый, полированный	22	0,931
Асбестовый картон	24	0,96
Бумага	20	0,80
Дерево, бук строганный	20	0,935
Дерево, дуб строганный	21	0,885
Лед гладкий	0	0,93
Лед шероховатый	0	0,985
Резина твердая, лощеная	23	0,945
Резина мягкая, серая, шероховатая	24	0,859
Стекло гладкое	22	0,937
Сажа, свечная копоть	95–270	0,952
Сажа с жидким стеклом	100–185	0,959–0,947
Сажа ламповая 0,075 мм и больше	40–370	0,945
Толь	21	0,910
Уголь очищенный (0,9 % золы)	125–625	0,81–0,79
Угольная нить	1040–1405	0,526
Фарфор глазурованный	22	0,924
Штукатурка известковая, белая, шероховатая	20	0,93
Эмаль белая, шероховатая	20	0,90
Эмаль черная, блестящая	25	0,876

## Приложение 5

### Номограммы для определения степени черноты дымовых газов [2, с. 241-243]

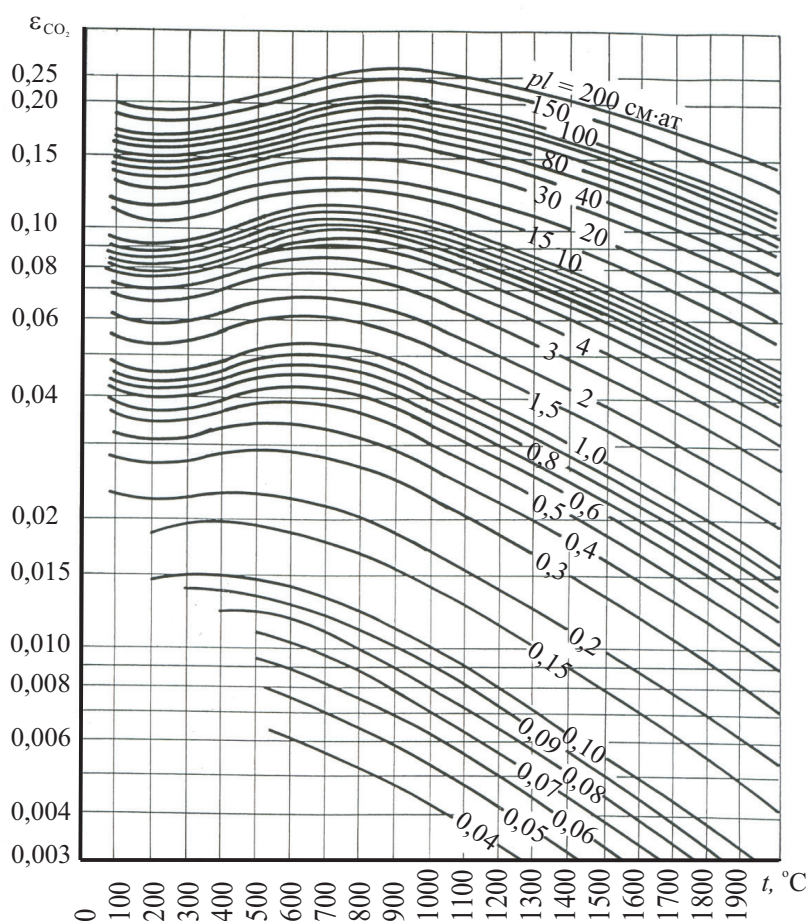


Рис. П. 5.1. Степень черноты углекислого газа в зависимости от температуры

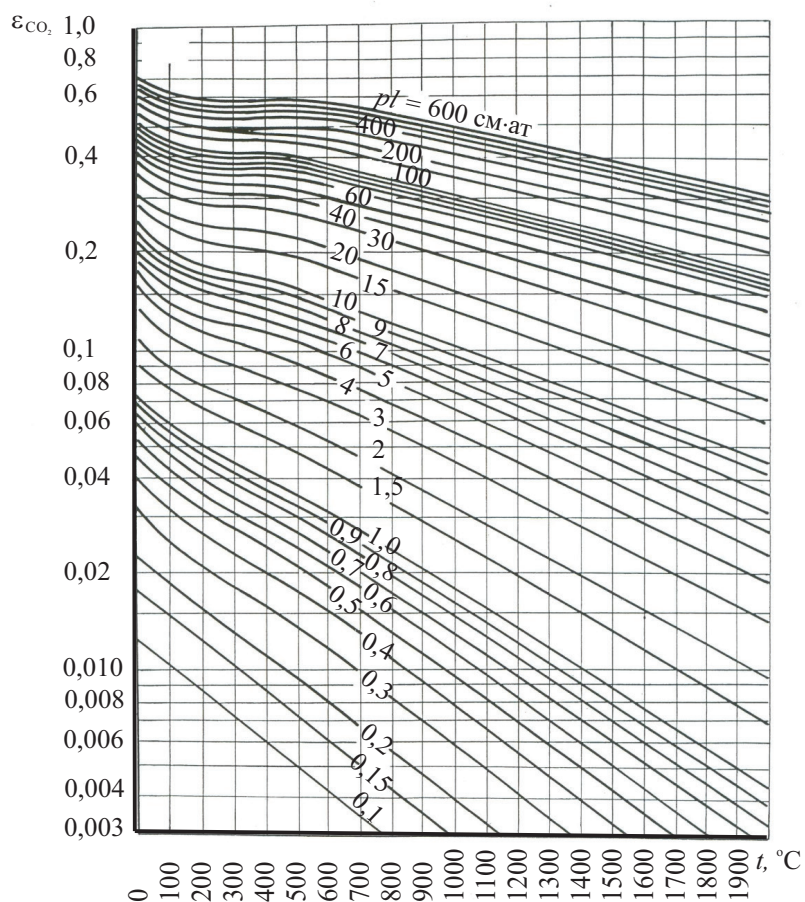


Рис. П. 5.2. Степень черноты водяного пара в зависимости от температуры

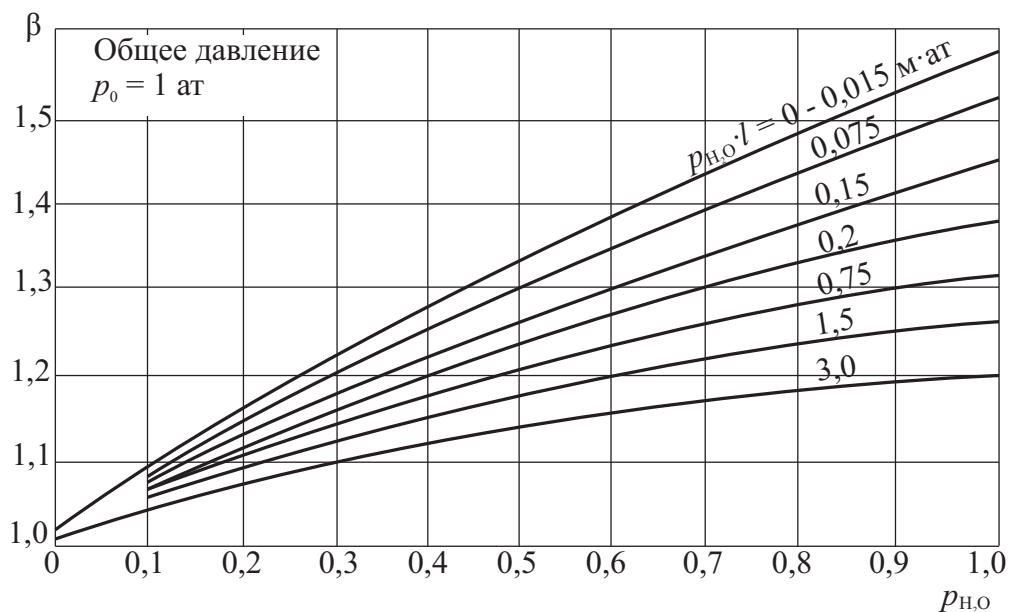


Рис. П. 5.3. Поправочный коэффициент  $\beta$  для парциального давления водяного пара

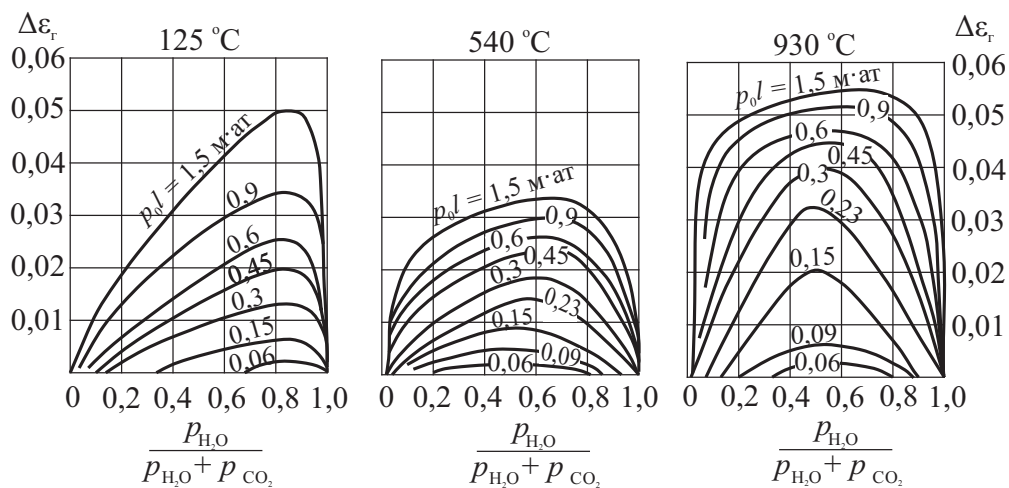


Рис. П. 5.4. Поправка на взаимное поглощение углекислого газа и водяного пара

# Оглавление

---

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1. ТЕПЛООБМЕН ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ .....	7
1.1. Основные понятия и определения .....	7
1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности для твердого тела.....	10
1.3. Теплопроводность при стационарном режиме ( $\partial t/\partial t = 0$ ) в отсутствие внутренних источников теплоты ( $q_v = 0$ ).....	14
1.3.1. Теплопроводность плоской стенки при граничных условиях первого рода .....	14
1.3.2. Теплопроводность плоской стенки при граничных условиях третьего рода (теплопередача через плоскую стенку).....	17
Примеры решения задач по теме «Стационарная теплопроводность и теплопередача через плоские стенки» .....	19
1.3.3. Теплопроводность цилиндрической стенки при граничных условиях первого рода .....	22
1.3.4. Теплопроводность цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода (теплопередача через цилиндрическую стенку) .....	25
1.3.5. Приближенный расчет теплопередачи через цилиндрическую стенку .....	27
1.3.6. Критический диаметр тепловой изоляции.....	28
Примеры решения задач по теме «Теплопроводность и теплопередача через цилиндрические стенки» .....	30
1.4. Способы интенсификации теплопередачи .....	34
1.4.1. Теплопередача через ребристую стенку (приближенный расчет) .....	35

1.4.2. Теплопроводность в ребре (стержне) постоянного поперечного сечения.....	37
1.4.3. Теплопередача через ребристую стенку (уточненный расчет) .....	39
Пример решения задачи по теме «Интенсификация процесса теплопередачи» .....	41
1.5. Теплопроводность при нестационарном режиме.....	44
1.5.1. Охлаждение (нагревание) бесконечной пластины.....	44
1.5.2. Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров правильной геометрической формы.....	53
1.5.3. Охлаждение (нагревание) тел любой формы при $Bi \rightarrow 0$ ( $Bi \leq 0,1$ ) .....	54
1.5.4. Регулярный тепловой режим .....	56
Примеры решения задач по теме «Нестационарная теплопроводность» .....	58
 Глава 2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН.....	64
2.1. Основные положения конвективного теплообмена между жидкостью и соприкасающейся с ней поверхностью...	65
2.2. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена для однородной инертной среды .....	70
2.2.1. Уравнение теплоотдачи.....	71
2.2.2. Уравнение энергии .....	71
2.2.3. Уравнение движения .....	72
2.2.4. Уравнение неразрывности потока .....	73
2.2.5. Система дифференциальных уравнений для определения коэффициента теплоотдачи.....	73
2.3. Элементы теории подобия.....	75
2.3.1. Приведение дифференциальных уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду.....	75
2.3.2. Моделирование процессов конвективного теплообмена .....	80
2.3.3. Критериальные уравнения .....	81
2.4. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости .....	82
2.4.1. Интегральное уравнение теплового потока через пограничный слой (уравнение Кружилина).....	83
2.4.2. Связь между теплоотдачей и трением (аналогия Рейнольдса) .....	84
2.4.3. Влияние направления теплового потока на величину коэффициента теплоотдачи .....	86



2.5. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости вдоль плоской поверхности.....	86
2.5.1. Теплоотдача при ламинарном ( $Re < 10^5$ ) режиме движения жидкости вдоль плоской поверхности.....	87
2.5.2. Теплоотдача при турбулентном ( $Re \geq 10^5$ ) режиме движения жидкости вдоль плоской поверхности.....	90
2.6. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости внутри труб.....	94
2.6.1. Теплоотдача при ламинарном режиме ( $Re < 2300$ ) движения жидкости в трубе .....	97
2.6.2. Теплоотдача при турбулентном режиме ( $Re \geq 10^4$ ) движения жидкости в трубе .....	99
2.6.3. Теплоотдача при переходном режиме движения жидкости в трубе.....	100
2.6.4. Теплоотдача при вынужденном течении жидкости в каналах .....	101
2.7. Теплоотдача при вынужденном поперечном обтекании одиночной трубы и пучка труб.....	105
2.7.1. Теплоотдача при поперечном обтекании одиночной трубы .....	105
2.7.2. Теплоотдача при поперечном обтекании пучка гладких труб .....	108
2.7.3. Теплоотдача при поперечном обтекании оребрённых труб .....	111
Примеры решения задач по теме «Теплоотдача при вынужденном движении жидкости».....	113
2.9. Теплоотдача при свободном движении жидкости.....	116
2.9.1. Свободная конвекция в неограниченном пространстве .....	117
2.9.2. Теплоотдача при свободном ламинарном ( $Gr \cdot Pr \leq 10^9$ ) движении жидкости вдоль вертикальной стенки .....	118
2.9.3. Теплоотдача при свободном турбулентном режиме ( $Gr \cdot Pr \geq 6 \cdot 10^{10}$ ) движения жидкости вдоль вертикальной стенки .....	122
2.9.4. Теплоотдача при свободном движении жидкости около горизонтальной трубы .....	123
2.9.5. Теплоотдача при свободном движении жидкости около горизонтально расположенной пластины .....	124
2.9.6. Теплоотдача при свободном движении жидкости в ограниченном пространстве.....	125

Примеры решения задач по теме «Теплоотдача при свободном движении жидкости» .....	128
2.10. Теплообмен при фазовых превращениях.....	130
2.10.1. Теплоотдача при конденсации водяного пара на вертикальной поверхности.....	130
2.10.2. Факторы, влияющие на теплообмен при конденсации .....	135
2.10.3. Теплоотдача при кипении жидкости на поверхности нагрева .....	137
Примеры решения задач по теме «Теплообмен при фазовых превращениях».....	142
Глава 3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ .....	144
3.1. Основные положения лучистого теплообмена .....	145
3.2. Законы теплового излучения.....	148
3.3. Теплообмен излучением между двумя телами с плоскопараллельными поверхностями.....	150
3.4. Теплообмен излучением между двумя телами с плоскопараллельными поверхностями .....	152
при наличии между ними экрана.....	152
3.5. Теплообмен излучением между телом и его оболочкой.....	154
3.6. Излучение газов и паров.....	157
3.7. Теплообмен между газовой средой и поверхностью .....	158
3.8. Сложный процесс теплообмена .....	159
Примеры решения задач на теплообмен излучением и сложный теплообмен .....	162
Глава 4. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ .....	167
4.1. Тепловой расчет рекуперативного теплообменника .....	169
4.2. Среднеинтегральный температурный напор .....	171
Примеры решения задач по теме «Тепловой расчет теплообменных аппаратов».....	175
Библиографический список .....	180

---

Приложение 1. Физические и теплофизические свойства различных материалов и веществ [2, с. 217–225] .....	181
Приложение 2. Значения показательных и гиперболических функций [2, с. 231] .....	189
Приложение 3. Номограммы для расчета задач по нестационарной теплопроводности [2, с. 232–239] .....	190
Приложение 4. Степень черноты поверхности излучения различных материалов [2, с. 228–230] .....	195
Приложение 5. Номограммы для определения степени черноты дымовых газов [2, с. 241–243] .....	198

*Учебное издание*

**Королев Владимир Николаевич  
Островская Анна Валентиновна**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕПЛОТЕХНИКИ.  
ТЕПЛОПЕРЕНОС**

Редактор О. С. Смирнова  
Верстка О. П. Игнатъевой

Подписано в печать 27.09.2021. Формат 70×100/16.  
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 16,61.  
Уч.-изд. л. 10,4. Тираж 30 экз. Заказ 218.

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс: +7 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>





### **КОРОЛЕВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ**

Доктор технических наук, профессор кафедры «Теплоэнергетика и теплотехника» Уральского федерального университета имени первого президента России Б. Н. Ельцина.

Автор учебных пособий по технической термодинамике, тепломассообмену, теории горения и взрыва, горения и конверсии органических топлив. Научная деятельность связана с исследованиями в области теплофизики дисперсных систем и структурно-гидродинамических основ взаимодействия высококонцентрированных дисперсных сред с поверхностями тел, позволяющих выяснить механизм явлений, построить модели процессов переноса и на их основе разрабатывать методы интенсификации тепломассообменных процессов.



### **ОСТРОВСКАЯ АННА ВАЛЕНТИНОВНА**

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Теплоэнергетика и теплотехника» Уральского федерального университета имени первого президента России Б. Н. Ельцина.

Автор учебников и учебных пособий по технической термодинамике, экологии, экологической безопасности газокompрессорных станций.

Лауреат премии Правительства РФ в области образования.

Область научных интересов — гидродинамика и тепломассообмен в дисперсных средах.